

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

**DEPARTAMENTO DE FÍSICA**

**NOVA ABORDAGEM NO ENSINO  
DE FÍSICA A NO 3<sup>o</sup> GRAU**

**PROF : EVERTON GOMES DE SANTANA**

# ÍNDICE

1-	INTRODUÇÃO	pg 1
2-	DESENVOLVIMENTO	2
2.0-	REVISÃO	2
2.0.1-	TRIGONOMETRIA	3
2.0.2-	SISTEMAS DE COORDENADAS E VETORES	4
2.0.3	SISTEMAS DE UNIDADES E EQUAÇÕES DIMENSIONAIS	
2.1-	CINEMÁTICA	9
2.1.1-	VETOR POSIÇÃO	9
2.1.2-	VETOR DESLOCAMENTO LINEAR	9
2.1.3-	VETOR VELOCIDADE LINEAR	9
2.1.4-	VETOR ACELERAÇÃO LINEAR	9
2.1.5-	MOVIMENTO RETILÍNEO UNIFORME	9
2.1.6-	MOVIMENTO RETILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO	9
2.1.7-	QUEDA LIVRE	9
2.1.8-	MOVIMENTO CURVILÍNEO TRIDIMENSIONAL	9
2.1.9-	DESLOCAMENTO ANGULAR	9
2.1.10-	VELOCIDADE ANGULAR	9
2.1.11-	ACELERAÇÃO ANGULAR	10
2.1.12-	LANÇAMENTO DE PROJÉTEIS NO PLANO ZX	10
2.1.13-	LANÇAMENTO DE PROJÉTEIS EM TRÊS DIMENSÕES	10
2.1.14-	MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME	11
2.1.15-	MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE VARIADO	11
2.1.16-	MOVIMENTO RELATIVO	11
2.2-	DINÂMICA	14
2.2.0-	MOMENTO LINEAR	14
2.2.1-	FORÇA	14
2.2.2-	MOMENTO DE INÉRCIA	15
2.2.3-	MOMENTO ANGULAR	15
2.2.4-	TORQUE	16
2.2.5-	LEIS DE NEWTON : TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO	16
2.2.6-	ENERGIA CINÉTICA	17
2.2.7-	TRABALHO DE UMA FORÇA	17
2.2.8-	ENERGIA POTENCIAL	18
2.3-	LEIS DE CONSERVAÇÃO	18
2.3.0-	MOMENTO LINEAR	18
2.3.1-	MOMENTO ANGULAR	18
2.3.2-	TRABALHO ENERGIA - SISTEMAS TERMODINÂMICOS	22
2.3.2.0-	1º LEI DA TERMODINÂMICA	
2.3.2.0.1-	SISTEMAS FECHADO - GÁS IDEAL	24
2.3.2.0.2-	PROCESSOS CALORIMÉTRICOS	25
2.3.2.1-	ENTROPIA E 2º LEI DA TERMODINÂMICA	26
2.3.2.1-	ENTROPIA E 2º LEI DA TERMODINÂMICA	26
2.3.2.1-	EXERCÍCIOS RESOLVIDOS	27

# **INTRODUÇÃO**

Neste trabalho apresentamos uma abordagem que acreditamos propiciará uma melhor aprendizagem no curso de mecânica com carga horária teórica de 60 horas e tendo como pré-requisito as disciplinas Vetores e Geometria Analítica e Cálculo I .

Iniciamos o curso fazendo uma apresentação das fórmulas básicas de trigonometria, sistemas de coordenadas e vetores em 4 horas.

Prosseguimos definindo as grandezas físicas usando os sistemas de coordenadas mais usados, aplicando-as no estudo dos movimentos, relacionando para cada grandeza, medidas feitas por um referencial que pode estar em movimento de translação e rotação simultâneo relativo a um referencial inercial, com medidas feitas pelo referencial inercial ou mesmo visualizando o fenômeno do referencial acelerado, efetuando a primeira avaliação abordando cinemática em 20 horas .

Prosseguimos abordando dinâmica, enfatizando as Leis de Newton e as Leis de Conservação efetuando a segunda avaliação em 24 horas .

Finalmente abordamos a Lei da Conservação do Trabalho Energia a sistemas Termodinâmicos aplicando a sistemas fechados e a sistemas com fluxo estacionário e efetuando a terceira avaliação em 12 horas.

## REVISÃO

### Trigonometria

$$\sin(-A) = -\sin(A)$$

$$\cos(-A) = \cos(A)$$

$$\sin(90+A) = \cos(A)$$

$$\sin(90-A) = \cos(A)$$

$$\cos(90+A) = -\sin(A)$$

$$\cos(90-A) = \sin(A)$$

$$\sin(360+A) = \sin(A)$$

$$\sin(360-A) = -\sin(A)$$

$$\sin(270+A) = -\cos(A)$$

$$\sin(A \pm B) = \sin(A) \cos(B) \pm \cos(A) \sin(B)$$

$$\cos(A \pm B) = \cos(A) \cos(B) \mp \sin(A) \sin(B)$$

$$\cos^2(A) + \sin^2(A) = 1 \quad \therefore \sin 2A = 2 \sin(A) \cos(A)$$

$$\cos(2A) = 2 \cos^2(A) - 1$$

$$\sin(180+A) = -\sin(A)$$

$$\sin(180-A) = \sin(A)$$

$$\cos(180+A) = -\cos(A)$$

$$\cos(180-A) = -\cos(A)$$

$$\cos(270+A) = \sin(A)$$

$$\cos(270-A) = -\sin(A)$$

$$\cos(360+A) = \cos(A)$$

$$\cos(360-A) = \cos(A)$$

$$\sin(270-A) = -\cos(A)$$

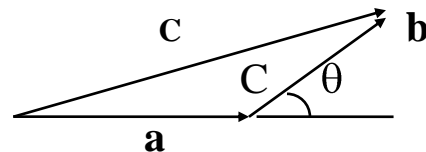
### Lei dos Senos

$$(a/\sin(A)) = (b/\sin(B)) = (c/\sin(C))$$

### Lei dos Cossenos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(C)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\theta)$$



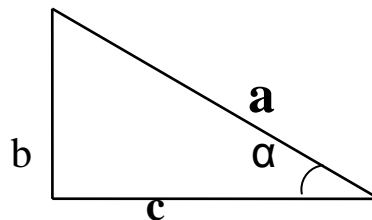
### Triângulo Retângulo

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\sin(\alpha) = b/a$$

$$\cos(\alpha) = c/a$$

$$\tan(\alpha) = b/c$$



**Sistemas de Coordenadas e Vetores**

Coordenadas Cartesianas  $P(x,y,z)$

$$\mathbf{B} = B_x * \mathbf{u}_x + B_y * \mathbf{u}_y + B_z * \mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{r} = x \mathbf{u}_x + y \mathbf{u}_y + z \mathbf{u}_z$$

$$d\mathbf{r} = dx \mathbf{u}_x + dy \mathbf{u}_y + dz \mathbf{u}_z$$

$$d\mathbf{A} = dy dz \mathbf{u}_x + dz dx \mathbf{u}_y + dx dy \mathbf{u}_z$$

$$dV = dx dy dz$$

Coordenadas Esféricas  $P(r,\theta,\phi)$

$$\mathbf{B} = B_r * \mathbf{u}_r + B_\theta * \mathbf{u}_\theta + B_\phi * \mathbf{u}_\phi$$

$$\mathbf{r} = r \mathbf{u}_r$$

$$d\mathbf{r} = dr \mathbf{u}_r + r d\mathbf{u}_r = d\mathbf{r}_r + d\mathbf{r}_\beta = d\mathbf{r}_r + d\mathbf{r}_\theta + d\mathbf{r}_\phi \text{ onde } d\mathbf{r}_\theta = d\theta * \mathbf{r}$$

$$d\mathbf{r}_\theta = d\theta \mathbf{u}_{p\theta} * r \mathbf{u}_r = r d\theta \mathbf{u}_\theta \therefore d\mathbf{r}_\phi = d\phi * \mathbf{r} = d\phi \mathbf{u}_z * r \mathbf{u}_r = r \sin(\theta) d\phi \mathbf{u}_\phi$$

$$d\mathbf{r} = dr \mathbf{u}_r + r d\theta \mathbf{u}_\theta + r \sin(\theta) d\phi \mathbf{u}_\phi$$

$$d\mathbf{A} = r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \mathbf{u}_r + r dr d\theta \mathbf{u}_\phi + r \sin(\theta) dr d\phi \mathbf{u}_\theta$$

$$dV = r^2 dr \sin(\theta) d\theta d\phi$$

Coordenadas Cilíndricas  $P(R,\phi,z)$

$$\mathbf{B} = B_R * \mathbf{u}_R + B_\phi * \mathbf{u}_\phi + B_z * \mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{r} = R \mathbf{u}_R + z \mathbf{u}_z \therefore d\mathbf{r} = dR \mathbf{u}_R + R d\phi \mathbf{u}_\phi + dz \mathbf{u}_z$$

$$d\mathbf{A} = R d\phi dz \mathbf{u}_R + dR dz \mathbf{u}_\phi + R d\phi dR \mathbf{u}_z$$

$$dV = R d\phi dR dz$$

Coordenadas Polares  $P(R,\phi)$

$$\mathbf{B} = B_R * \mathbf{u}_R + B_\phi * \mathbf{u}_\phi$$

$$\mathbf{R} = R \mathbf{u}_R$$

$$d\mathbf{R} = dR \mathbf{u}_R + R d\mathbf{u}_R$$

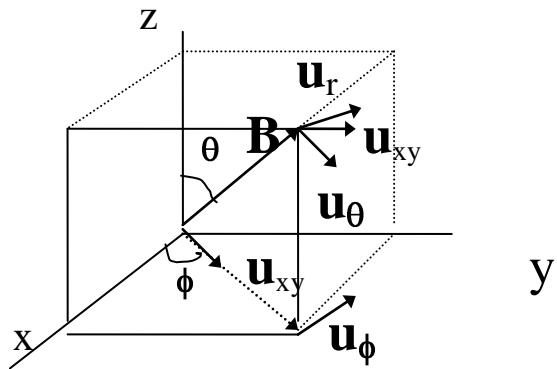
$$d\mathbf{A} = R dR d\phi \mathbf{u}_z$$

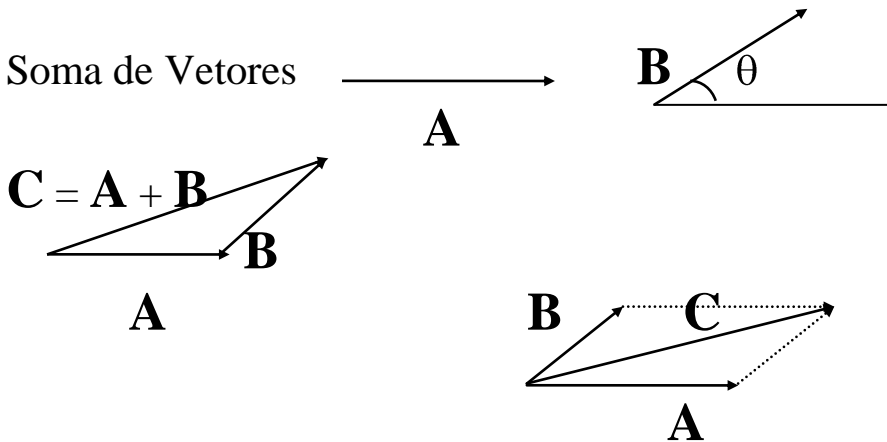
Relação entre as coordenadas

$$x = R \cos(\phi) \qquad x = r \sin(\theta) \cos(\phi) \qquad x = R \cos(\phi)$$

$$y = R \sin(\phi) \qquad y = r \sin(\theta) \sin(\phi) \qquad y = R \sin(\phi)$$

$$z = z \qquad z = r \cos(\theta)$$





Produto Escalar

Se  $\mathbf{A} = A_x \mathbf{u}_x + A_y \mathbf{u}_y + A_z \mathbf{u}_z$  e  $\mathbf{B} = B_x \mathbf{u}_x + B_y \mathbf{u}_y + B_z \mathbf{u}_z$

$$E = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A \mathbf{u}_A \cdot B \mathbf{u}_B = A B \cos(\theta) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = A_{r^*} B_{r^*} + A_{\theta^*} B_{\theta^*} + A_{\phi^*} B_{\phi^*}$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{A_{r^*}^2 + A_{\theta^*}^2 + A_{\phi^*}^2}$$

$$\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_x = \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r = \mathbf{u}_\theta \cdot \mathbf{u}_\theta = \mathbf{u}_\phi \cdot \mathbf{u}_\phi = 1$$

$$\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_\phi = \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_\theta = \mathbf{u}_\theta \cdot \mathbf{u}_\phi = 0$$

$$\mathbf{u}_\theta \cdot \mathbf{u}_z = \cos(90+\theta) = -\sin(\theta) \quad \therefore \mathbf{u}_\theta \cdot \mathbf{u}_{xy} = \cos(\theta) \quad \therefore \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_{xy} = \sin(\theta)$$

Projeção de um vetor  $\mathbf{B}$  ao longo da direção de  $\mathbf{A}$

$$B_A = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_A \quad \mathbf{B}_A = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_A \mathbf{u}_A$$

Observação: Quando se deseja projetar um vetor  $\mathbf{A}$  sobre um direção D e não sendo conhecido o ângulo entre o vetor e a direção D, então projeta-se o vetor numa direção H em que se conheça o ângulo entre o vetor e esta direção H e o angulo entre a direção H e a direção D.

$$A_D = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_H \mathbf{u}_H \cdot \mathbf{u}_D \quad \therefore \mathbf{A}_D = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_H)(\mathbf{u}_H \cdot \mathbf{u}_D) \mathbf{u}_D$$

Logo para decompor um vetor  $\mathbf{B}$  ao longo das direções de  $\mathbf{u}_S, \mathbf{u}_T, \mathbf{u}_V$  fazemos

$$\mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_S) \mathbf{u}_S + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_T) \mathbf{u}_T + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_V) \mathbf{u}_V$$

Produto Vetorial

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} * \mathbf{B} = A \mathbf{u}_A * B \mathbf{u}_B = - \mathbf{B} * \mathbf{A} \text{ Como por definição } \mathbf{u}_A * \mathbf{u}_B = \sin(\theta) \mathbf{u}_{PAB}$$

$$\mathbf{C} = A B \sin(\theta) \mathbf{u}_{PAB}$$

$$\mathbf{C} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{u}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{u}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{u}_z$$

Regra da mão esquerda espalmada :

O dedo polegar é colocado na direção do segundo vetor (no caso **B**) e o restante dos dedos na direção do primeiro vetor (no caso **A**). Então a direção do vetor **C** é a da palma da mão.

Produtos vetoriais dos vetores unitários nos sistemas de coordenadas mais usados.

$$\mathbf{u}_x * \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_z \quad \therefore \quad \mathbf{u}_z * \mathbf{u}_x = \mathbf{u}_y \quad \therefore \quad \mathbf{u}_y * \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_x$$

$$\mathbf{u}_R * \mathbf{u}_\phi = \mathbf{u}_z \quad \therefore \quad \mathbf{u}_z * \mathbf{u}_R = \mathbf{u}_\phi \quad \therefore \quad \mathbf{u}_\phi * \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_R$$

$$\mathbf{u}_r * \mathbf{u}_\theta = \mathbf{u}_\phi \quad \therefore \quad \mathbf{u}_\phi * \mathbf{u}_r = \mathbf{u}_\theta \quad \therefore \quad \mathbf{u}_\theta * \mathbf{u}_\phi = \mathbf{u}_r$$

$$\mathbf{u}_\phi * \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_{xy} \quad \therefore \quad \mathbf{u}_z * \mathbf{u}_r = \text{Sin}(\theta) \mathbf{u}_\phi$$

$$\mathbf{u}_z * \mathbf{u}_\theta = \text{Sin}(90+\theta) \mathbf{u}_\phi = \text{Cos}(\theta) \mathbf{u}_\phi \quad \therefore \quad \mathbf{u}_z * \mathbf{u}_\phi = -\mathbf{u}_{xy} = -\mathbf{u}_R$$

$$\mathbf{u}_r * \mathbf{u}_{xy} = \text{Sin}(90-\theta) \mathbf{u}_\phi = \text{Cos}(\theta) \mathbf{u}_\phi \quad \therefore \quad \mathbf{u}_{xy} = \mathbf{u}_R$$

Demonstrar que:  $\mathbf{u}_r = \text{Sin}(\theta) \text{Cos}(\phi) \mathbf{u}_x + \text{Sin}(\theta) \text{Sin}(\phi) \mathbf{u}_y + \text{Cos}(\theta) \mathbf{u}_z$

$$\mathbf{u}_\theta = \text{Cos}(\theta) \text{Cos}(\phi) \mathbf{u}_x + \text{Cos}(\theta) \text{Sin}(\phi) \mathbf{u}_y - \text{Sin}(\theta) \mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{u}_\phi = \text{Cos}(\phi) \mathbf{u}_y - \text{Sin}(\phi) \mathbf{u}_x$$

Demonstrar que:  $\mathbf{u}_x = \text{Cos}(\phi) \text{Sin}(\theta) \mathbf{u}_r + \text{Cos}(\phi) \text{Cos}(\theta) \mathbf{u}_\theta - \text{Sin}(\phi) \mathbf{u}_\phi$

$$\mathbf{u}_y = \text{Sin}(\phi) \text{Sin}(\theta) \mathbf{u}_r + \text{Sin}(\phi) \text{Cos}(\theta) \mathbf{u}_\theta + \text{Cos}(\phi) \mathbf{u}_\phi$$

$$\mathbf{u}_z = \text{Cos}(\theta) \mathbf{u}_r - \text{Sin}(\theta) \mathbf{u}_\theta$$

Demonstrar que:  $\mathbf{u}_{xy} = \text{Cos}(\theta) \mathbf{u}_\theta + \text{Sin}(\theta) \mathbf{u}_r = \text{Cos}(\phi) \mathbf{u}_x + \text{Sin}(\phi) \mathbf{u}_y$

Os sistemas de unidades mais conhecidos são os do tipo LMT e LFT. Os sistemas do tipo LMT são aqueles que utilizam como grandezas fundamentais o comprimento, a massa e o tempo e os sistemas do tipo LFT são aqueles que utilizam como grandezas fundamentais o comprimento, a força e o tempo. As unidades, das grandezas básicas ou fundamentais e as derivadas, no MKS são definidas em

[www.fisica.ufs.br/egsantana/unidades/unidades/unidades.htm](http://www.fisica.ufs.br/egsantana/unidades/unidades/unidades.htm)

Um quilograma força é a força que aplicada a um corpo de massa 1 kg produz neste uma aceleração de  $g \text{ m/s}^2$ , onde  $g$  é a aceleração da gravidade local.

Observação: As unidades do sistema inglês foram dadas como ilustração para o nosso curso de Física A.

Para sabermos as unidades das grandezas derivadas devemos saber a definição da grandeza em termos de unidades e reduzir todas as unidades das grandezas da fórmula as unidades das grandezas fundamentais no sistema considerado.

Fato semelhante ocorre quando queremos saber a equação dimensional de uma grandeza derivada, ou seja, devemos saber a definição da grandeza e reduzir todas as grandezas da fórmula as dimensões das grandezas fundamentais.

Por exemplo: Para sabermos a unidade de aceleração devemos conhecer a definição de aceleração em termos de unidades ou seja aceleração é a razão entre a velocidade e o tempo (isto porque

$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta V / \Delta t) = dV/dt$  e reduzir todas as grandezas da fórmula as

unidades das grandezas fundamentais LMT ou LFT.

Logo:  $U(a) = U(V)/U(t) = (U(d)/U(t))/U(t) = U(d)/(U(t))^2$

Para sabermos a equação dimensional da grandeza aceleração, procedemos de modo semelhante, expressando como produto. Se EQD(a) é a equação dimensional da aceleração, então  $EQD(a) = EQD(V)/EQD(t) = EQD(d)/(EQD(t))^2 \therefore EQD(a) = LT^{-2}$ .

**Aplicações**

1) Relação entre as unidades.

Exemplo 1: Trabalho: MKS/CGS = J/erg =  $(\text{kg m}^2/\text{s}^2)/(\text{g cm}^2/\text{s}^2) = (10^3 \text{ g } (10^2 \text{ cm})^2/\text{s}^2)/(\text{g cm}^2/\text{s}^2) = 10^7$ . Logo:  $1 \text{ j} = 10^7 \text{ erg}$  ou  $1 \text{ kg m}^2/\text{s}^2 = 10^7 \text{ g cm}^2/\text{s}^2$ .

Outra maneira; EQD(Tr) =  $\text{ML}^2\text{T}^{-2}$  ∴ MKS/CGS = J/erg =  $(\text{kg m}^2/\text{s}^2)/(\text{g cm}^2/\text{s}^2) = 10^7$

2) Previsão de fórmula física.

Toda fórmula física é dimensionalmente homogênea, ou seja, a equação dimensional do primeiro membro da equação é igual à equação dimensional do segundo membro a menos de uma constante adimensional.

Exemplo 1: Um cientista realizando experiências com um pêndulo simples constatou que o período do pêndulo depende do comprimento do pêndulo e da aceleração local da gravidade. Qual a fórmula do período a menos de uma constante.

$t = f(l, g)$  ∴  $t = C l^a g^b$  desejamos saber qual o valor de a e de b para que a equação seja dimensionalmente homogênea. EQD(t) = T e EQD(l) = L e EQD(g) =  $\text{LT}^{-2}$

$T = C L^a (\text{LT}^{-2})^b$  ∴  $T = L^{a+b} T^{-2b}$  ∴ Para ser dimensionalmente homogênea os expoentes devem ser iguais.  $0 = a+b$  e  $1 = -2b$  ∴ Logo resolvendo o sistema obtemos:  $a = 0,5$  e  $b = -0,5$

A fórmula procurada é:  $t = C l^{0,5} g^{-0,5}$  ∴  $t = C \sqrt{l} / \sqrt{g}$

A constante C é encontrada realizando experiências, medindo-se o comprimento, a aceleração da gravidade e o tempo, encontrando a constante C. Repete-se a experiência varias vezes para valores diferentes de l e g obtendo-se vários valores para C a fim de encontrar o valor médio.

Resolva as questões de número 1 até a de número 9 da lista de exercícios.

Abaixo apresentamos uma tabela que mostra as unidades de algumas grandezas expressa em termos das unidades das grandezas fundamentais bem como as equações dimensionais destas grandezas.

LMT	LFT
-----	-----

Grandezas	CGS	MKS	Inglês	Eq Dimensional	MKFS	Inglês Técnico	Eq Dimensional
Comprimento	cm	m	ft	L	m	ft	L
Tempo	s	s	s	T	s	s	T
Massa	g	kg	lbm	M	kgf/(m/s <sup>2</sup> )= utm	lbf/(ft/s <sup>2</sup> )= slug	FL <sup>-1</sup> T <sup>2</sup>
Velocidade	cm/s	m/s	ft/s	LT <sup>-1</sup>	m/s	ft/s	LT <sup>-1</sup>
Aceleração	cm/s <sup>2</sup>	m/s <sup>2</sup>	ft/s <sup>2</sup>	LT <sup>-2</sup>	m/s <sup>2</sup>	ft/s <sup>2</sup>	LT <sup>-2</sup>
Força	g cm/s <sup>2</sup> = dinas	kg m/s <sup>2</sup> = newton	lbm ft/s <sup>2</sup> = poundall	MLT <sup>-2</sup>	kgf	lbf	F
Trabalho	g cm <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> =erg	kgm <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> = joule	lbm ft <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>	ML <sup>2</sup> T <sup>-2</sup>	kgf m	lbf m	FL
Pressão	g/cms <sup>2</sup> =bária	kg/ms <sup>2</sup> =Pa	lbm/fts <sup>2</sup>	ML <sup>-1</sup> T <sup>-2</sup>	kgf/m <sup>2</sup>	lbf/ft <sup>2</sup>	FL <sup>-2</sup>
Densidade	g/cm <sup>3</sup>	kg/m <sup>3</sup>	lbm/ft <sup>3</sup>	ML <sup>-3</sup>	kgf/(m <sup>4</sup> s <sup>2</sup> )	lbf/(ft <sup>4</sup> s <sup>2</sup> )	FL <sup>-4</sup> T <sup>-2</sup>

## CINEMÁTICA

Parte da mecânica que estuda os corpos em movimento sem levar em conta as causas que provocam o movimento (força)

**Vetor Posição :**  $\mathbf{r} = x \mathbf{u}_x + y \mathbf{u}_y + z \mathbf{u}_z$

**Vetor Deslocamento :**  $d\mathbf{r} = dx \mathbf{u}_x + dy \mathbf{u}_y + dz \mathbf{u}_z$

**Vetor Velocidade :**  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t))/\Delta t$

A velocidade é um vetor tangente a trajetória  $\mathbf{r}(t)$  em cada ponto

**Vetor Aceleração :**  $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$  (vetor tangente a  $\mathbf{v}(t)$ )

### Movimento Retilíneo Uniforme

Características: Vetor velocidade constante e trajetória retilínea

$d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt \quad \therefore \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v} t$

$x = x_0 + v_x t \quad \therefore \quad y = y_0 + v_y t \quad \therefore \quad z = z_0 + v_z t$

### Movimento Retilíneo Uniformemente Variado

Características: Vetor aceleração constante e trajetória retilínea

$d\mathbf{v} = \mathbf{a} dt \quad \therefore \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a} t$

$d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt \quad \therefore \quad d\mathbf{r} = (\mathbf{v}_0 + \mathbf{a} t) dt$

$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{a} t^2/2$

Das equações vetoriais  $\mathbf{v} = \mathbf{f}(t)$  e  $\mathbf{r} = \mathbf{f}(t)$  acima obtemos :

$x = x_0 + v_{0x} t + a_x t^2/2 \quad v_x = v_{0x} + a_x t$

$y = y_0 + v_{0y} t + a_y t^2/2 \quad v_y = v_{0y} + a_y t$

$z = z_0 + v_{0z} t + a_z t^2/2 \quad v_z = v_{0z} + a_z t$

### Queda Livre (Lançamento vertical no vácuo)

Se o movimento for ao longo do eixo z então :

$\mathbf{a} = -g \mathbf{u}_z \quad , \quad x = y = x_0 = y_0 = v_x = v_y = v_{0x} = v_{0y} = a_x = a_y = 0$

### Movimento Curvilíneo Tridimensional

Características : Trajetória curva

**Deslocamento Angular :**  $d\beta$  é a variação entre duas posições angulares

**Velocidade Angular :**  $\mathbf{w} = d\beta/dt \quad \therefore \quad \mathbf{w} = (d\beta/dt)\mathbf{u}_{p\beta}$  onde  $\mathbf{u}_{p\beta}$  é o vetor unitário perpendicular ao plano de  $d\beta$

$$\mathbf{W} = w_x \mathbf{u}_x + w_y \mathbf{u}_y + w_z \mathbf{u}_z \quad \text{ou} \quad \mathbf{W} = w_\theta \mathbf{u}_{p\theta} + w_\phi \mathbf{u}_{p\phi}$$

Demonstre que:  $\mathbf{W} = w_\phi \mathbf{u}_z + w_\theta \mathbf{u}_\phi$ :  $\mathbf{W} = w_\phi \cos(\theta) \mathbf{u}_r - w_\phi \sin(\theta) \mathbf{u}_\theta + w_\theta \mathbf{u}_\phi$

**Aceleração Angular** :  $\boldsymbol{\alpha} = d\mathbf{W}/dt$  :  $\boldsymbol{\alpha} = (dw/dt) \mathbf{u}$

Demonstre que :  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_\phi \cos(\theta) - w_\theta w_\phi \sin(\theta)) \mathbf{u}_r -$

$(\alpha_\phi \sin(\theta) + w_\phi w_\theta \cos(\theta)) \mathbf{u}_\theta + \alpha_\theta \mathbf{u}_\phi$

### **Lançamento de Projéteis no Plano ZX**

Superposição de dois movimentos um na direção z que é MRUV e outro na direção x que é MRU

$$\mathbf{a} = -g \mathbf{u}_z, \quad y = y_0 = a_y = a_x = v_{oy} = 0$$

### **Lançamento de Projéteis em três Dimensões**

Superposição de três movimentos, sendo um na direção z que é MRUV e os dois outros MRU nas direções x e y.

$$\mathbf{a} = -g \mathbf{u}_z, \quad a_x = a_y = 0$$

Agora estudando um movimento curvilíneo que não é decomposto em movimentos retilíneos torna-se conveniente expressar às vezes as grandezas físicas vetoriais em outros sistemas de coordenadas, dependendo da geometria do sistema. Dentre os sistemas mais utilizados podemos citar: sistema de coordenadas cartesianas; sistema de coordenadas esféricas; sistema de coordenadas cilíndricas e o sistema de coordenadas polares, que é o sistema de coordenadas cilíndricas no plano.

Demonstre que  $(d\mathbf{u}_r/dt) = \boldsymbol{\omega} * \mathbf{u}_r$  logo  $d\mathbf{u}_r = d\boldsymbol{\beta} * \mathbf{u}_r$

Demonstre que :  $\mathbf{v}_\beta = \boldsymbol{\omega} * \mathbf{r}$

Demonstre a equação da aceleração no movimento curvilíneo tridimensional

Às vezes é conveniente decompor o vetor aceleração nas suas componentes normal e tangencial onde a componente tangencial é responsável pela rapidez com que varia o módulo do vetor velocidade e a componente normal é responsável pela rapidez com que varia a direção do vetor velocidade

Demonstre que  $\mathbf{a}_\beta = \boldsymbol{\alpha} * \mathbf{r}$  e  $\mathbf{a}_n = (v^2/r) \mathbf{u}_n$  no MCVU

**Movimento Circular Uniforme**

Características: Trajetória circular e o vetor velocidade angular constante.

Logo  $\mathbf{W} = \text{constante}$ ,  $a_t = 0$ ,  $a_n = \text{constante}$ ,  $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$

Se a partícula movimenta-se no plano xy então  $\beta = \phi$  é o angulo que o vetor posição  $\mathbf{r} = \mathbf{R}$  forma com o eixo x

Demonstre as equações  $\mathbf{w} = f(t)$  e  $\phi = f(t)$  do MCU

**Movimento Circular Uniformemente Variado**

Características: Trajetória circular e o vetor aceleração angular constante.

Logo  $\dot{a}_t = \text{constante}$ ,  $\boldsymbol{\alpha} = \text{constante}$

Demonstre as equações  $\mathbf{W} = f(t)$  e  $\phi = f(t)$  do MCUV

**Movimento Relativo de Translação e Rotação de Referenciais.**

Às vezes torna-se conveniente para facilitar o estudo do fenômeno, quando existem vários corpos em movimento relativo a um referencial inercial, colocar -mos referencial em outros corpos facilitando assim medidas de grandezas relativo a este referencial, podendo este ter movimento de translação e rotação simultâneos relativo ao inercial.

Seja  $K'$  um referencial que tem um movimento acelerado em relação a um referencial inercial  $K$ , e com velocidade angular  $\mathbf{W}$  em relação a  $K$ .

Então estudando o movimento de uma partícula temos :

Visto por  $K'$  o vetor posição é :  $\mathbf{r}' = x' \mathbf{u}_x' + y' \mathbf{u}_y' + z' \mathbf{u}_z'$

Visto por  $K$  o vetor posição é :  $\mathbf{r} = x \mathbf{u}_x + y \mathbf{u}_y + z \mathbf{u}_z$

Em um instante t qualquer :  $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'$

Visto por  $K$  o vetor velocidade é :  $\mathbf{v} = v_x \mathbf{u}_x + v_y \mathbf{u}_y + v_z \mathbf{u}_z$

Visto por  $K'$  o vetor velocidade é :

$\mathbf{v}' = (dx'/dt) \mathbf{u}_x' + (dy'/dt) \mathbf{u}_y' + (dz'/dt) \mathbf{u}_z'$

Visto por  $K_0'$  com mesma origem de  $K'$  mas não girante o vetor velocidade é :

$$\mathbf{v}_{ng}' = (d\mathbf{r}'/dt)_{ng} = (dx'/dt)\mathbf{u}_x' + (dy'/dt)\mathbf{u}_y' + (dz'/dt)\mathbf{u}_z' + x'(d\mathbf{u}_x'/dt) + y'(d\mathbf{u}_y'/dt) + z'(d\mathbf{u}_z'/dt)$$

$$\mathbf{v}_{ng}' = (dx'/dt)\mathbf{u}_x' + (dy'/dt)\mathbf{u}_y' + (dz'/dt)\mathbf{u}_z' + x'\mathbf{w} * \mathbf{u}_x' + y'\mathbf{w} * \mathbf{u}_y' + z'\mathbf{w} * \mathbf{u}_z'$$

$$\mathbf{v}_{ng}' = (dx'/dt)\mathbf{u}_x' + (dy'/dt)\mathbf{u}_y' + (dz'/dt)\mathbf{u}_z' + \mathbf{w} * \mathbf{r}' \quad \therefore \mathbf{v}_{ng}' = \mathbf{v}' + \mathbf{w} * \mathbf{r}'$$

$$\mathbf{v} = d\mathbf{R}/dt + \mathbf{v}_{ng}' \quad \therefore \mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}_{ng}' \quad \therefore \mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}' + \mathbf{w} * \mathbf{r}'$$

Visto por  $K$  o vetor aceleração é :  $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$

Visto por  $K'$  o vetor aceleração é :  $\mathbf{a}' = d\mathbf{v}'/dt$

Visto por  $K_0'$  o vetor aceleração é :  $\mathbf{a}_0' = d\mathbf{v}_0'/dt = \mathbf{a}'_{ng}$

$$\mathbf{a} = d\mathbf{V}/dt + (d\mathbf{v}'/dt)_{ng} + \mathbf{w} * (d\mathbf{r}'/dt)_{ng} + (d\mathbf{w}/dt) * \mathbf{r}'$$

$$\mathbf{a} = d\mathbf{V}/dt + (d\mathbf{v}'/dt)_g + \mathbf{w} * \mathbf{v}' + \mathbf{w} * ((d\mathbf{r}'/dt)_g + \mathbf{w} * \mathbf{r}') + (d\mathbf{w}/dt) * \mathbf{r}'$$

$$\mathbf{a} = d\mathbf{V}/dt + \mathbf{a}' + 2\mathbf{w} * \mathbf{v}' + \mathbf{w} * (\mathbf{w} * \mathbf{r}') + (d\mathbf{w}/dt) * \mathbf{r}'$$

A equação acima significa que o referencial  $O$  (inercial) está usando medidas de posição, velocidade e aceleração feitas por  $O'$  (não inercial) para encontrar a aceleração, mas os termos não tem significado específico para  $O$ . Escrevendo

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{A} - 2\mathbf{w} * \mathbf{v}' - \mathbf{w} * (\mathbf{w} * \mathbf{r}') - (d\mathbf{w}/dt) * \mathbf{r}'$$

A equação acima significa que a pessoa está agora no referencial não inercial e quer descrever o fenômeno visto por ele e para isto ele vê as forças que o inercial vê ( $m\mathbf{a}$ ) e ele tem que aplicar a partícula as forças de inércia ( $-m\mathbf{A}$ ) e ( $-m2\mathbf{w} * \mathbf{v}'$  força de Coriolis) e ( $-m\mathbf{w} * \mathbf{w} * \mathbf{r}'$  força centrífuga) e ( $-m(d\mathbf{w}/dt) * \mathbf{r}'$ )

Observação : Dado um vetor  $\mathbf{A}'$  visto (medido) por um referencial que gira com velocidade angular  $\mathbf{w}$ , então a derivada deste vetor em relação ao tempo visto pelo referencial que não gira é :

$$(d\mathbf{A}'/dt)_{ng} = (d\mathbf{A}'/dt)_g + \mathbf{w} * \mathbf{A}'$$

Se o referencial  $K'$  translada-se com MRU em relação a  $K$  (Transformação de Galileu)  $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{R} \quad \therefore \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} \quad \therefore \mathbf{a} = \mathbf{a}'$

$$x = x' + v_x t \quad \therefore y = y' + v_y t \quad \therefore z = z' + v_z t \quad \therefore \mathbf{V} = \text{constante}$$

Se o referencial  $K'$  translada-se com MRV em relação a  $K$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{R} \quad \therefore \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} \quad \therefore \mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{A} \quad \therefore \text{Onde } \mathbf{A} = d\mathbf{V}/dt$$

**OBSERVAÇÃO:**

Um dos conceitos mais importantes da Física é o de referencial, isto porque as grandezas físicas dependem do referencial. Podemos estudar um fenômeno ou seja fazer medidas de grandezas de um referencial inercial ou de um referencial não inercial.

Referencial inercial é aquele que está em repouso ou em MRU em relação às estrelas fixas.

Referencial não inercial é aquele que está acelerado em relação a um inercial.

Outro conceito importante é o de sistema de coordenadas, porque dependendo da geometria, a escolha do sistema de coordenada conveniente facilita a solução do problema sendo os termos da solução facilmente interpretados. Por exemplo no estudo do MCU se escolhermos o sistema de coordenadas cartesianas a aceleração é dada por  $\mathbf{a} = -\omega^2 x \mathbf{u}_x - \omega^2 y \mathbf{u}_y$  mas se escolhermos o sistema de coordenadas polares a aceleração é dada por  $\mathbf{a} = -\omega_\phi^2 R \mathbf{u}_R$  (aceleração centrípeta) isto porque como sabemos a força resultante se a partícula desloca-se com MCU está dirigida em sentido contrário a  $\mathbf{e}_R$  que é uma das orientações do sistema de coordenadas polares.

Observação : As Leis de Newton são válidas se as grandezas são medidas de um referencial inercial. Se quisermos estudar um fenômeno de um referencial não inercial devemos, aplicar ao corpo além das forças vista pelo referencial inercial, a força devido à aceleração do referencial, que é chamada força de inércia, logo:

$$\mathbf{F}'_R = \mathbf{F}_R - \mathbf{F}_I$$

## DINÂMICA

Parte da mecânica que estuda os corpos em movimento levando em conta as causas que provocam o movimento.

### Vetor Quantidade de Movimento Linear

$$\mathbf{P}_i = m_i \mathbf{v}_i \quad \therefore \mathbf{P} = \sum m_i \mathbf{v}_i$$

Movimento relativo (Quantidade de Movimento)

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{V} + \mathbf{v}_i' \quad \therefore m_i \mathbf{v}_i = m_i \mathbf{V} + m_i \mathbf{v}_i'$$

$$\sum m_i \mathbf{v}_i = \sum m_i \mathbf{V} + \sum m_i \mathbf{v}_i' \quad \therefore \mathbf{P} = M \mathbf{V} + \mathbf{P}'$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{do ref}} + \mathbf{P}'$$

Se a origem de K' é colocada num ponto tal que  $\mathbf{P}' = \sum m_i \mathbf{v}_i' = 0$ ,

então este ponto é chamado Centro de Massa, então  $\sum m_i \mathbf{v}_i = M \mathbf{V}$

$$\mathbf{V}_{\text{do cm}} = \left( \sum m_i \mathbf{v}_i / M \right) \quad \therefore \mathbf{R}_{\text{do cm}} = \left( \sum m_i \mathbf{r}_i / M \right)$$

$$\text{Logo: } X_{\text{do cm}} = \left( \sum m_i x_i / M \right) \quad \therefore Y_{\text{do cm}} = \left( \sum m_i y_i / M \right) \quad \therefore$$

$$Z_{\text{do cm}} = \left( \sum m_i z_i / M \right)$$

### Vetor Força

Força Gravitacional

$$\mathbf{F}_G = - (G M m / r^2) \mathbf{u}_r = - m g \mathbf{u}_r \quad \text{onde } g = G M / r^2$$

Força (Deformações pequenas - Lei de Hooke )

$$\mathbf{F} = - k \Delta \mathbf{r} = - k \Delta r \mathbf{u} \quad \text{onde } \Delta r \text{ e a deformação}$$

Força de Atrito

$$\mathbf{F}_A = - \mu N \mathbf{u} \quad (\text{Sólido deslizando sobre superfície sólida})$$

$$\mathbf{F}_A = - C_1 \eta v \mathbf{u} \quad (\text{Sólido em movimento num fluído - Stokes}): .C_1 = 6 \pi R$$

$$\mathbf{F}_A = - (C_2 \rho A v^2 / 2) \mathbf{u} \quad (\text{Sólido em movimento num fluído para } v \text{ grande})$$

Força Empuxo

$$\mathbf{F}_E = m_{fd} g \mathbf{e} = \rho V_{fd} g \mathbf{u}$$

Força Resultante

$$\mathbf{F}_R = d\mathbf{P}/dt = m d\mathbf{v}/dt + \mathbf{v} dm/dt \quad \therefore \text{Se } m = \text{constante: } \mathbf{F}_R = m d\mathbf{v}/dt$$

**Prof: Everton Gomes de Santana**  
**Momento de Inércia e Produtos de Inércia**

$$I = \sum m_i r_i^2 \quad (\text{Sistema de partículas})$$

$$I = \int r^2 dm \quad (\text{Corpo rígido}) \quad \text{onde } dm = \rho dV$$

$$I_x = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) \quad \therefore \quad I_x = \int (y^2 + z^2) dm$$

$$I_y = \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) \quad \therefore \quad I_y = \int (x^2 + z^2) dm$$

$$I_z = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \quad \therefore \quad I_z = \int (x^2 + y^2) dm$$

$$I_{xy} = \sum m_i x_i y_i \quad \therefore \quad I_{xy} = \int x y dm$$

$$I_{xz} = \sum m_i x_i z_i \quad \therefore \quad I_{xz} = \int x z dm$$

$$I_{yz} = \sum m_i y_i z_i \quad \therefore \quad I_{yz} = \int y z dm$$

$$I = (I_x + I_y + I_z)/2$$

Demonstrar o teorema dos eixos paralelos :  $I_P = I_{CM} + M h^2$

**Vetor Momento Angular**

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} * \mathbf{P} = \mathbf{r} * m \mathbf{v} = r \mathbf{u}_r * m v \mathbf{u}_v = m r v \sin(\theta) \mathbf{u}_{Prv}$$

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{r}_i * m_i \mathbf{v}_i \quad \therefore \quad \mathbf{L} = \int w r^2 dm \mathbf{u}$$

Demonstrar que  $\mathbf{L}$  em coordenadas esféricas é dado por :

$$\mathbf{L} = m r^2 w_\theta \mathbf{u}_\phi - m r^2 w_\phi \sin(\theta) \mathbf{u}_\theta$$

Se o movimento for no plano xy então :  $\theta = 90^\circ$

$$\mathbf{L} = - m r^2 w_\phi \mathbf{u}_\theta = m r^2 w_\phi \mathbf{u}_z = I w_\phi \mathbf{u}_z$$

Demonstrar que  $\mathbf{L} = (I_{xx} w_x - I_{xy} w_y - I_{xz} w_z) \mathbf{u}_x +$

$$(I_{yy} w_y - I_{yx} w_x - I_{yz} w_z) \mathbf{u}_y + (I_{zz} w_z - I_{zx} w_x - I_{zy} w_y) \mathbf{u}_z$$

Obs : Se calcularmos  $\mathbf{L}$  relativo ao centro de massa, simplificamos a fórmula porque os produtos de inércia são nulos.

Movimento Relativo (Momento Angular).

Demonstre que:

$$\mathbf{L} = \sum m_i \mathbf{R} * \mathbf{V} + \sum m_i \mathbf{R} * \mathbf{v}_i' + \sum m_i \mathbf{r}_i' * \mathbf{V} + \sum m_i \mathbf{r}_i' * \mathbf{v}_i'$$

Se a origem de K' estiver no centro de massa

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{do \text{ cm}} + \mathbf{L}_{rel \text{ ao cm}}$$

**Prof: Everton Gomes de Santana**

**Prof: Everton Gomes de Santana**

### Vetor Torque ou Vetor Momento de uma Força

$$\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt = \mathbf{r} * \mathbf{F} = r \mathbf{u}_r * F \mathbf{u}_F = r F \sin(\theta) \mathbf{u}_{PrF}$$

Demonstre que:  $\boldsymbol{\tau} = m(y a_z - z a_y) \mathbf{u}_x + m(z a_x - x a_z) \mathbf{u}_y + m(x a_y - y a_x) \mathbf{u}_z$

Movimento relativo (Torque)

Demonstre que :  $\boldsymbol{\tau} = \sum \mathbf{R} * m_i \mathbf{a}_i' + M \mathbf{R} * \mathbf{A} + \sum \mathbf{r}' * m_i \mathbf{a}_i' +$

$$\sum m_i \mathbf{r}_i' * \mathbf{A}$$

Se a origem de K' estiver no centro de massa então :

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{\text{do cm}} + \boldsymbol{\tau}_{\text{rel ao cm}}$$

### Leis de Newton (Translação)

1º Lei :

Quando a resultante de todas as forças que atuam num corpo for nula, ele permanecerá em repouso ou em MRU.

$$\mathbf{F}_R = 0 : . \mathbf{a} = 0 : . \mathbf{v} = \text{constante ou } \mathbf{v} = 0$$

Inércia - é a propriedade que possui os corpos de se estiverem em repouso continuarem em repouso e se estiverem em MRU, continuarem em MRU.

A medida da inércia a translação é feita pela massa.

2º Lei :

A resultante das forças que atuam num corpo é igual à derivada, da quantidade de movimento linear em relação ao tempo.

$$\mathbf{F}_R = d\mathbf{P}/dt : . \mathbf{F}_R = d(m\mathbf{v})/dt : . \mathbf{F}_R = m(d\mathbf{v}/dt) + \mathbf{v} dm/dt$$

3º Lei :

A toda força de ação corresponde a uma força de reação de mesmo módulo e direção e tendo sentidos contrários.

Obs : As forças de ação e reação atuam em corpos diferentes

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA} \text{ (A força de A sobre B é igual em módulo à força de B sobre A)}$$

### Leis de Newton ( Rotação)

1º Lei : Se o torque resultante aplicado ao corpo for nulo então o corpo permanecerá em repouso ou em MCU

**Prof: Everton Gomes de Santana**

Se  $\tau = 0$  então o corpo está em repouso ou em MCU

2<sup>o</sup> Lei : O torque resultante é igual à derivada da quantidade de movimento angular em relação ao tempo.

$$\tau = d\mathbf{L}/dt$$

3<sup>o</sup> Lei : A todo torque de ação corresponde a um torque de reação de mesmo módulo e direção e sentidos contrários.

$$\tau_{AB} = - \tau_{BA}$$

Obs : Os torques de ação e reação atuam em corpos diferentes.

Condições de Equilíbrio de Partículas :  $\mathbf{F}_R = 0$

Condições de Equilíbrio de Corpos Rígidos :  $\mathbf{F}_R = 0$  e  $\tau_R = 0$

### Energia Cinética

$$E_C = (1/2) m \mathbf{V}^2 : . \mathbf{V} = v_r \mathbf{u}_r + \mathbf{W} * \mathbf{r} \text{ ou } \mathbf{V} = v_x \mathbf{u}_x + v_y \mathbf{u}_y + v_z \mathbf{u}_z$$

$$\text{Demonstre que: } E_C = (1/2) m \mathbf{V}^2 + (1/2) I \mathbf{W}^2 - (1/2) m \mathbf{W} \cdot \mathbf{r}$$

$$\text{Demonstre que: } E_C = (1/2) m v_r^2 + (1/2) ( I_x w_x^2 + I_y w_y^2 + I_z w_z^2 - 2 w_x w_y I_{xy} - 2 w_z w_x I_{zx} - 2 w_y w_z I_{yz} )$$

$$\text{Demonstre que : } E_C = E_{CT} + E_{CR} \text{ Ou } E_C = (1/2) m v_r^2 + L^2 / (2 I)$$

$$\text{Onde } \mathbf{L} = m r^2 w_\theta \mathbf{u}_\phi - m r^2 \text{Sin}(\theta) w_\phi \mathbf{u}_\theta$$

Movimento relativo (Energia Cinética)

$$\text{Demonstre que: } E_C = \sum (1/2) m_i \mathbf{v}_i'^2 + (\sum m_i \mathbf{v}_i') \cdot \mathbf{V} + (1/2) M \mathbf{V}^2$$

Se a origem de K' está no centro de massa então:

$$E_C = E_{C \text{ do cm}} + E_{C \text{ rel cm}}$$

### Trabalho de uma Força

$$dT_F = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$T_{F \text{ A} \rightarrow \text{B}} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\text{menor valor}}^{\text{maior valor}} F dr \cos(\alpha)$$

Demonstre que o trabalho da força resultante é igual à variação da energia cinética.

**Energia Potencial**

É o trabalho realizado pela força do campo no retorno do corpo ao estado de energia potencial zero.

1) Campo Uniforme :  $\mathbf{F} = - m g \mathbf{u}_r$

$E_P(\mathbf{r}) = T_{F h} \rightarrow 0 =$

$$\int_0^h mg \, dr \cos(0) = m g h$$

2) Campo :  $\mathbf{F} = - G M m \mathbf{u}_r / r^2$

$E_P(\mathbf{r}) = T_{F r} \rightarrow \infty =$

$$\int_r^\infty \left( \frac{G M m}{r^2} \right) dr \cos(180) = - \frac{G M m}{r}$$

3) Campo :  $\mathbf{F} = - k \mathbf{r} = - k r \mathbf{u}_r$

$E_P(\mathbf{r}) = T_{F r} \rightarrow 0 =$

$$\int_0^r k r \, dr \cos(0) = k r^2 / 2$$

**LEIS DE CONSERVAÇÃO**

1) **Momento Linear**

Se  $\mathbf{F}_R = 0$  então  $\Sigma \mathbf{P}_i = \text{Constante}$

2) **Momento Angular**

Se  $\boldsymbol{\tau}_R = 0$  então  $\Sigma \mathbf{L}_i = \text{Constante}$

3) **Trabalho Energia**

$T_{FR} = \Delta E_C$

$T_{FNC} + T_{FC} = \Delta E_C$  Como  $T_{FC} = - \Delta E_P$

$T_{FNC} - \Delta E_P = \Delta E_C \quad \therefore T_{FNC} = \Delta E_C + \Delta E_P$

Observação : Ao estudarmos o movimento de um corpo com movimento de rotação em torno de um centro instantâneo “O” ,podemos fazê-lo como uma rotação pura onde a energia é dada por  $E_C = (1/2) I_o \omega^2$  ou como uma translação, e rotação simultâneo isto é estudamos o sistema como um movimento de translação do centro de massa e uma rotação, em torno do centro de massa, onde a energia é dada por  $E_C = (1/2) I_{cm} \omega^2 + (1/2) m v_{cm}^2$ . O ponto do sistema chamado centro de massa é escolhido porque sempre podemos encontrar três eixos de simetria que tem origem neste ponto de modo que os produtos de inércia são nulos em relação a esta origem, levando a simplificações nas equações e a equação  $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$  é válida mesmo que o centro de massa seja um referencial acelerado.

Observação : Quando o momento angular  $\mathbf{L}$  é paralelo a velocidade angular  $\mathbf{W}$  ou seja o eixo de simetria coincide com o eixo de rotação, então  $\mathbf{L} = I \mathbf{W}$  pois estes eixos são eixos principais de inércia. Quando  $\mathbf{L}$  não é paralelo a  $\mathbf{W}$  podemos encontrar três direções mútuas perpendiculares, chamadas eixos principais de inércia, então :

$\mathbf{L} = I_{x0} \omega_{x0} \mathbf{u}_{x0} + I_{y0} \omega_{y0} \mathbf{u}_{y0} + I_{z0} \omega_{z0} \mathbf{u}_{z0}$  ou aplicamos a equação geral relativo a um referencial inercial em que  $\mathbf{L}$  é função dos produtos de inércia.

Observação : Ao resolver um problema você observará se as forças que atuam no sistema são constantes, pois se forem você poderá usar as Leis de Newton ou as Leis de Conservação. Se as forças que atuam no sistema não são constantes então será facilitada à solução se você usar as Leis de Conservação, pois se usar as Leis de Newton resultará numa equação diferencial.

Análise da equação :  $\mathbf{F}_R = d\mathbf{P}/dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta\mathbf{P}/\Delta t$  onde  $\mathbf{P} = \sum m_i \mathbf{v}_i$

1) Se estivermos determinando a força resultante sobre um corpo de massa constante então  $\mathbf{F}_R = m d\mathbf{v}/dt + \mathbf{v} dm/dt$  onde  $dm/dt = 0$  logo

$$\mathbf{F}_R = m d\mathbf{v}/dt = m \mathbf{a}$$

2) Se a massa do corpo em estudo não é constante então a força resultante  $\mathbf{F}_R = d(m \mathbf{v})/dt = m d\mathbf{v}/dt + \mathbf{v} dm/dt$

Exemplo : Areia caindo verticalmente de um funil num carro grande

3) Se estivermos determinando a força resultante sobre um sistema de corpos de modo a haver interação entre os corpos e como a massa do sistema é

constante então  $\mathbf{F} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i)/\Delta t$  onde  $\mathbf{P}_f = \mathbf{P}_{f1} +$

$\mathbf{P}_{f2} + \dots + \mathbf{P}_{fn}$  é a quantidade de movimento do sistema depois da interação e  $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_{i1} + \mathbf{P}_{i2} + \dots + \mathbf{P}_{in}$  é a quantidade de movimento do sistema antes da interação

Exemplo : Foguete e seus gases ejetados

4) As Leis de Newton são válidas se as grandezas são medidas de um referencial inercial, porém podemos aplicá-las se observadas de um referencial não inercial se aplicarmos a cada corpo que constituem o sistema a força devido à aceleração do referencial que é denominada força de inércia, logo

como  $\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{A}$  então multiplicando pela massa de cada corpo temos  $\mathbf{F}_R' = \mathbf{F}_R - \mathbf{F}_I$

**Prof: Everton Gomes de Santana**

OBSERVAÇÃO :

Se o corpo possuir um plano de simetria e rodar em torno de um eixo fixo perpendicular a este plano então

$$\sum F_n = m r w^2 \quad ; \quad \sum F_t = m r \alpha \quad ; \quad \sum \tau_o = I_o \alpha$$

Sendo o ponto “O” o centro de rotação, r a distancia entre o eixo de rotação “O” e o centro de gravidade “G”

Se a rotação for em relação a um eixo de simetria então

$$\sum F_n = 0 \quad ; \quad \sum F_t = 0 \quad ; \quad \sum \tau_G = I_G \alpha \quad \text{pois } r = 0$$

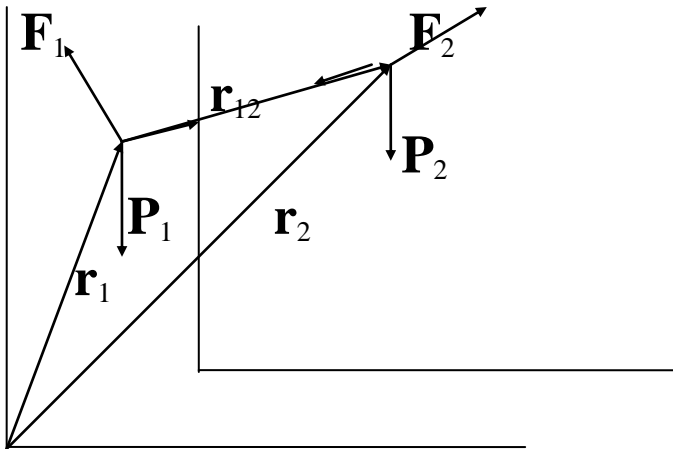
Podemos usar o método da força de inércia onde CP é o centro de percussão que é o ponto sobre o eixo  $\mathbf{u}_n$  através do qual atua a resultante das forças efetivas, incluindo a reação no apoio. O centro de percussão situa-se a distância  $d = K_o^2 / r$  do centro de oscilação “O”, ao longo de  $\mathbf{u}_n$  onde  $K_o$  é o raio de giração do corpo, sendo  $K_o^2 = I_o / m$  logo  $I_o = m r d$

Se o corpo rígido movimentar-se num plano então

$$\sum F_x = m a_x \quad ; \quad \sum F_y = m a_y \quad ; \quad \sum \tau_G = I_G \alpha$$

**Prof: Everton Gomes de Santana**

Consideremos um sistema composto de um gás que pode estar em regime de fluxo estacionário. Tomemos um referencial inercial e um outro solidário ao centro de massa do sistema. O esquema abaixo mostra as forças que atuam em duas das partículas do sistema.



$$T_{R1} + T_{R2} = \Delta E_{C1} + \Delta E_{C2}$$

$$T_{F1} + T_{P1} + T_{F12} + T_{F2} + T_{P2} + T_{F21} = \Delta E_C$$

$$\int \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \int \mathbf{P}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \int \mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_1 + \int \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 + \int \mathbf{P}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 + \int \mathbf{F}_{21} \cdot d\mathbf{r}_2 = \Delta E_C$$

∴ Como  $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$  e  $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  ∴  
 $d\mathbf{r}_{12} = d\mathbf{r}_1 - d\mathbf{r}_2$

$$\int \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \int \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 + \int \mathbf{P}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 + \int \mathbf{P}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \int \mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_{12} = \Delta E_C$$

Fazendo raciocínio análogo para muitas partículas temos :

$$T_{\Sigma F_i} + T_{\Sigma P_i} + T_{\Sigma F_{int}} = \Delta E_C \quad \therefore T_{\Sigma F_i} - \Delta E_P - \Delta E_{P_{int}} = \Delta E_C$$

$$T_{\Sigma F_i} - (E_{Pf} - E_{Pi}) - (E_{Pf_{int}} - E_{Pi_{int}}) = E_{Cf} - E_{Ci}$$

Energia Própria :  $S = E_C + E_{P_{int}} \quad \therefore S_f - S_i = T_{\Sigma F_i} - (E_{Pf} - E_{Pi})$

Energia Total :  $E = S + E_{P_{ext}}$

$$E_f - E_i = T_{\Sigma F_i}$$

Se  $T_{\Sigma Fi} = 0$  então  $E_f = E_i$

$$E = S + E_{P \text{ ext}} = E_C + E_{P \text{ int}} + E_{P \text{ ext}}$$

Sabemos que  $E_C = E_{C \text{ do cm}} + E_{C \text{ rel cm}}$

$$E_C = (1/2) M v^2 + \sum (1/2) m_i v_i'^2$$

Definindo energia interna :  $U = E_{C \text{ rel cm}} + E_{P \text{ int}}$

Logo  $E = U + E_{C \text{ do cm}} + E_{P \text{ ext}}$

$$E_f - E_i = \Delta U + \Delta E_{C \text{ do cm}} + \Delta E_{P \text{ ext}} = T_{\Sigma Fi}$$

Onde  $T_{\Sigma Fi}$  é o trabalho realizado sobre sistema (positivo) e  $\Delta Q$  é o calor fornecido ao sistema (positivo)

$$\text{Escrevendo } T_{\Sigma Fi} = T_{\Sigma Fi*} + \Delta Q$$

$$T_{\Sigma Fi*} + \Delta Q = \Delta U + \Delta E_{C \text{ do cm}} + \Delta E_{P \text{ ext}}$$

Escrevendo a equação em função do trabalho realizado pelo sistema como positivo :  $T_{\Sigma Fi**} = - T_{\Sigma Fi*}$

Na forma integral ( 1º Lei da Termodinâmica)

$$\Delta Q = \Delta T_{\Sigma Fi**} + \Delta U + \Delta E_{C \text{ do cm}} + \Delta E_{P \text{ ext}}$$

Na forma diferencial ( 1º Lei da Termodinâmica )

$$dQ = dT_{\Sigma Fi**} + dU + dE_{C \text{ do cm}} + dE_{P \text{ ext}}$$

Se no sistema tiver turbina, compressor, bomba , perdas e para sistemas com fluxo devemos considerar o trabalho da vizinhança sobre o sistema e o trabalho do sistema sobre a vizinhança, que é da forma (P V) .

$$\text{Então : } dQ = dT_t + dT_b + dT_c + dT_p + dU + dE_{C \text{ do cm}} + dE_{P \text{ ext}} + d(P V)$$

Energia Interna :  $U = E_{C \text{ rel cm}} + E_{P \text{ int}}$

Considerando  $U = U (T,V)$  então :  $dU = ( U/ T) dT + ( U/ V) dV$

Entalpia  $H = U + P V$  : .  $dH = dU + d(P V)$  Considerando  $H = H (T,V)$  então :

$$dH = ( H/ T) dT + ( H/ V) dV \text{ Se } P = \text{Constante } dH = dQ$$

Substituindo na equação da 1º Lei da Termodinâmica temos :

$$dQ = dT_t + dT_b + dT_c + dT_p + dE_{C \text{ do cm}} + dE_{P \text{ ext}} + dH$$

Calor Específico : quantidade de calor necessária para que a temperatura de uma unidade de massa ou de um mol da substância varie de um grau.

$$c_v = (1/m) ( U/ T)_V \quad \text{e} \quad c_v = (1/n) ( U/ T)_V$$

$$c_p = (1/m) ( H/ T)_P \quad \text{e} \quad c_p = (1/n) ( H/ T)_P$$

Calor Latente : quantidade de calor necessária para mudar de fase uma unidade de massa ou um mol da substância

Sistemas Fechados(gás) :  $\Delta E_{P_{ext}} = 0$ ,  $\Delta E_{C_{do\ cm}} = 0$  e  $dT_{\Sigma_{fi}^{**}} = PdV = dW$

1º Lei :  $dQ = dU + dW$

Transformações gasosas : (Isobárica  $P = \text{Const}$ , Isométrica  $V = \text{const}$ , Isotérmica  $T = \text{Const}$ , Adiabática  $Q = \text{Const}$ , Politrópica )

**Gás Ideal** :  $U = E_{C_{rel\ cm}}$  porque  $E_{P_{int}} = 0$

$$U = E_{C_{rel\ cm}} = \sum (1/2) m_i v_i^2 = (1/2) M v_{qm}^2 = (3/2) n R T = (3/2) N K T$$

$dU = n c_V dT$  ou  $dU = m c_V dT = (3/2) n R dT$  onde :

$$R = 8,31 \text{ J/mol } ^\circ\text{K} = 2 \text{ cal /mol } ^\circ\text{K} = 0,082 \text{ atm l /}^\circ\text{K mol e}$$

$$K = 1,38 \text{ J/molecula } ^\circ\text{K}$$

Demonstre as equações do trabalho, quantidade de calor, energia interna para cada transformação gasosa estudada (gás ideal)  $P V = n R T$

Demonstre que  $c_p = c_v + R$

Demonstre as equações  $P = f(T)$ ,  $V = f(T)$  e  $P = f(V)$  na transformação adiabática.

**Gás Real** ( Van Der Vall ) :  $(P + a/v^2) (v - b) = R T$  onde  $v = V/n$



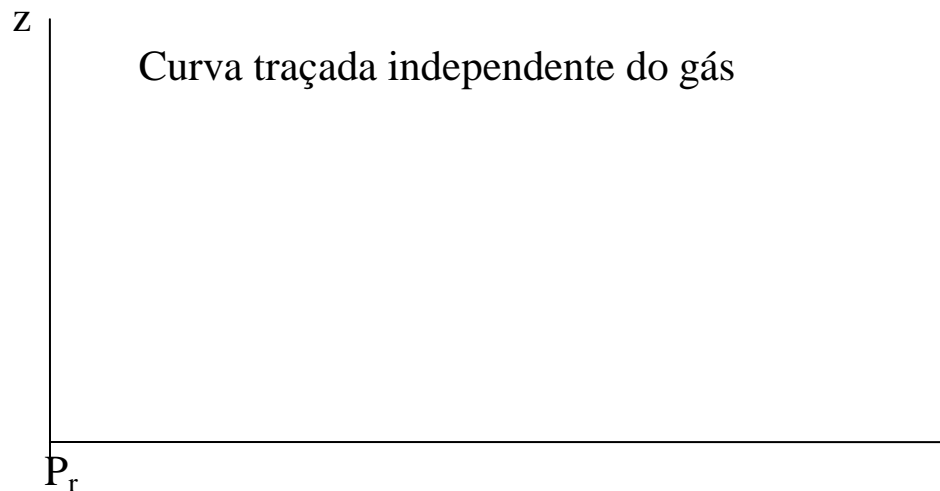
Coordenadas do Ponto Crítico

O ponto crítico é um ponto de inflexão da curva  $P = f(V)$ , logo para achá-lo fazemos:  $(\partial P / \partial v)_t = 0$  e  $(\partial^2 P / \partial v^2)_t = 0$  e obtemos:

$$v_{cr} = 3 b, T_{cr} = 8 a / 27 R b, P_{cr} = a / 27 b^2$$

Demonstre a equação  $((P_r/3) + (1/v_r^2)) (3v_r - 1) = (8/3) Tr$  (Van Der Wall na forma reduzida) onde  $Tr = T / T_{cr}$  e  $P_r = P / P_{cr}$  e  $v_r = v / v_{cr}$

Gás Real (Fator de Compressibilidade) :  $z = (P V)_{\text{real}} / (P V)_{\text{ideal}}$   
 $z = (P V)_{\text{real}} / (n R T) : \therefore P V = z n R T$  ou  $P v = z R T : \therefore z = P v / (R T)$



Processos Calorimétricos : (Sistema isolado  $\Delta Q = 0$ )

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W = 0$$

Considerando um sistema constituído de sólidos e líquidos e desprezando o trabalho devido a dilatação dos mesmos então  $\Delta T = 0$

$$\text{Logo } \Delta U = \sum \Delta U_i = 0$$

Demonstre que quando misturamos água fria com água quente em um calorímetro de capacidade C então :

$$m_f c_f (T_{\text{eq}} - T_f) + C (T_{\text{eq}} - T_f) + m_q c_q (T_{\text{eq}} - T_q) = 0 \quad : \therefore c_q = c_f = 1 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$$

Demonstre a equação obtida quando misturamos água fria, com um sólido frio e água quente em um calorímetro de capacidade C

Demonstre a equação obtida quando misturamos água fria, com gelo a  $0^\circ\text{C}$  em um calorímetro de capacidade C.

**Entropia e 2º Lei da Termodinâmica**

Clausius: é impossível o calor passar de um corpo a uma dada temperatura a outro a uma temperatura mais elevada espontaneamente.

Kelvin: é impossível construir uma maquina que trabalhando em ciclo produza como único efeito externo a maquina a execução de trabalho graças a troca de calor com uma única fonte.

Sabemos que um sistema estará mais freqüentemente em um estado de maior probabilidade do que em um estado de menor probabilidade, e quanto maior a probabilidade de um estado de um sistema maior será sua entropia.

Como  $S = k \ln(w)$  onde  $k$  é a constante de Boltzmann e  $w$  é a probabilidade de um estado do sistema então  $\Delta S = k \ln(w_2) - k \ln(w_1)$  logo :  
 $\Delta S = k \ln(w_2/w_1)$

Sabemos que a variação de entropia do universo tende a aumentar ou ficar constante pois  $\Delta S_U \geq 0$  (que significa uma diminuição energética do universo naquele processo).

Exemplo : Quando se mistura água quente com fria não se perde energia mas a oportunidade de se converter parte do calor da água quente em trabalho mecânico. Logo quando a entropia aumenta a energia se torna menos disponível ou seja o universo se deteriorou energeticamente ou ainda o universo baixou a sua capacidade de trocar energia (Significado do termo irreversível).

Sabemos :  $\Delta S_U = \Delta S_S + \Delta S_V$

A grandeza entropia é definida macroscopicamente como:

$$dS = dQ/T \quad \text{logo} \quad \Delta S = \int dQ/T$$

Demonstre que a equação da variação de entropia sofrida por uma massa gasosa em função da temperatura e do volume é:

$$\Delta S = n c_V \ln(T_f/T_i) + n R \ln(V_f/V_i)$$

Demonstre a equação da variação de entropia sofrida por uma massa durante o aquecimento ou resfriamento reversível de um sólido ou líquido é :  $\Delta S = n c \ln(T_f/T_i)$

Demonstre a equação da variação de entropia sofrida por uma massa durante o aquecimento ou resfriamento irreversível de um sólido ou líquido é :  $\Delta S = n c (T_f - T_i)/T_f$

Exercícios Resolvidos

1) Um homem pode remar um barco a 5 m/s em águas paradas. Se este barqueiro pretende atravessar um rio com correnteza partindo da origem, qual o tempo gasto na travessia e qual a orientação que deve ser dada ao barco a fim de chegar nas coordenadas:

a)  $P_2(0, 200)$  e b)  $P_2(50, 200)$ .

Resolva os itens a) e b) se a velocidade do rio for  $V_{rt} = 4 U_x$  e também se for

$$V_{rt} = 4 U_x + 3 U_y$$

Solução 1:

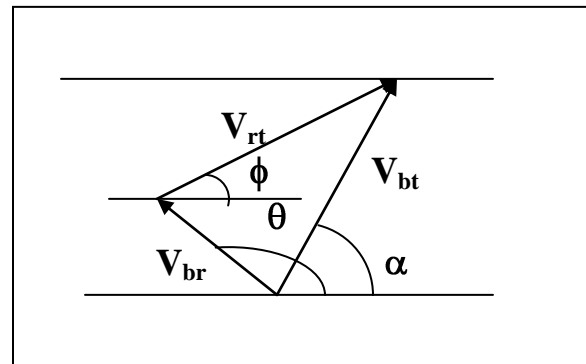
a)  $P_2(0, 200)$ : . logo  $V_{rt} = 4 U_x$  e  $\phi = 0^\circ$  e  $\alpha = 90^\circ$

$$V_{br} \cos(\theta) + V_{rt} \cos(\phi) = V_{bt} \cos(\alpha)$$

$$V_{br} \sin(\theta) + V_{rt} \sin(\phi) = V_{bt} \sin(\alpha)$$

$$5 \cos(\theta) + 4 \cos(0^\circ) = V_{bt} \cos(90^\circ)$$

$$5 \sin(\theta) + 4 \sin(0^\circ) = V_{bt} \sin(90^\circ)$$



$$5 \cos(\theta) + 4 = 0 \therefore \cos(\theta) = -4/5 = -0,8 \therefore \theta = 143,13^\circ$$

$$5 \sin(\theta) = V_{bt} \therefore V_{bt} = 5 \sin(143,13^\circ) = 3 \text{ m/s}$$

$$t = l / V_{bt} = 200/3 = 66,7 \text{ s}$$

Solução 2:

a)  $P_2(0, 200)$  logo:  $V_{rt} = 4 U_x + 3 U_y$  : .  $V_{rt} = 5 \text{ m/s}$ : .  $\text{tg}(\phi) = 3/4 = 0,75$  : .

$\phi = 36,87^\circ$  e  $\alpha = 90^\circ$

$$5 \cos(\theta) + 4 \cos(36,87^\circ) = V_{bt} \cos(90^\circ)$$

$$5 \sin(\theta) + 4 \sin(36,87^\circ) = V_{bt} \sin(90^\circ)$$

$$5 \cos(\theta) + 4 = 0 \therefore \cos(\theta) = -4/5 = -0,8 \therefore \theta = 143,13^\circ$$

$$5 \sin(\theta) + 3 = V_{bt} \therefore V_{bt} = 6 \text{ m/s}$$

$$t = l / V_{bt} = 200/6 = 33,3 \text{ s}$$

Prof. Everton Gomes de Santana

Solução 3:

b)  $P_2(50, 200)$  logo  $V_{rt} = 4 U_x$  e  $\phi = 0^\circ$  e  $\text{tg}(\alpha) = 200/50 = 4 : . \alpha = 75,96^\circ$

$$5 \cos(\theta) + 4 \cos(0^\circ) = V_{bt} \cos(75,96^\circ)$$

$$5 \sin(\theta) + 4 \sin(0^\circ) = V_{bt} \sin(75,96^\circ)$$

$$5 \cos(\theta) + 4 = 0,243 V_{bt}$$

$$5 \sin(\theta) = 0,970 V_{bt} : . V_{bt} = 5,155 \sin(\theta) = 5,155 \exists 1 - \cos^2(\theta) : .$$

$$V_{bt}^2 = 26,57 - 26,57 \cos^2(\theta)$$

$$(5 \cos(\theta) + 4)^2 = (0,243 V_{bt})^2 ; .$$

$$25 \cos^2(\theta) + 40 \cos(\theta) + 16 = 0,059 (26,57 - 26,57 \cos^2(\theta))$$

$$26,57 \cos^2(\theta) + 40 \cos(\theta) + 14,43 = 0 : . \cos(\theta) = (-40 + 8,15)/53,14 = -0,599 : .$$

$$\theta = 126,8^\circ$$

$$V_{bt} = 4,13 \text{ m/s}$$

e  $\cos(\theta) = (-40 - 8,15)/53,14 = -0,906 : . \theta = 154,97^\circ$  porque não serve?

Solução 4:

b)  $P_2(50, 200)$  logo  $V_{rt} = 4 U_x + 3 U_y : . V_{rt} = 5 \text{ m/s}$  e  $\text{tg}(\phi) = 3/4 = 0,75 : . \phi = 36,87^\circ$  e

$\text{tg}(\alpha) = 200/50 = 4 : . \alpha = 75,96^\circ$

$$5 \cos(\theta) + 4 \cos(36,87^\circ) = V_{bt} \cos(75,96^\circ)$$

$$5 \sin(\theta) + 4 \sin(36,87^\circ) = V_{bt} \sin(75,96^\circ)$$

$$5 \cos(\theta) + 4 = 0,243 V_{bt}$$

$$5 \sin(\theta) + 3 = 0,970 V_{bt} : . V_{bt} = 5,155 \sin(\theta) + 3,093 = 3,093 + 5,155 \text{ RaizQ}(1 - \cos^2(\theta))$$

$$5 \cos(\theta) + 4 = 0,243 (3,093 + 5,155 \text{ RaizQ}(1 - \cos^2(\theta))) =$$

$$0,752 + 1,253 \text{ RaizQ}(1 - \cos^2(\theta))$$

$$5 \cos(\theta) + 3,248 = 1,253 \text{ RaizQ}(1 - \cos^2(\theta)) : .$$

$$25 \cos^2(\theta) + 32,48 \cos(\theta) + 10,550 = 1,57 - 1,57 \cos^2(\theta)$$

$$26,57 \cos^2(\theta) + 32,48 \cos(\theta) + 8,98 = 0 : .$$

$$\cos(\theta) = (-32,48 + 10,03)/53,14 = -0,422 : . \theta = 115^\circ$$

$$V_{bt} = 7,75 \text{ m/s}$$

$\cos(\theta) = (-30,48 - 10,03)/53,14 = -0,762 : . \theta = 139,7^\circ$  Porque não serve?

**OUTRA MANEIRA**

Lei dos senos:  $(\sin(\theta - \alpha)/V_{rt}) = (\sin(\alpha - \phi)/V_{br}) : .$

$$(\sin(\theta - 75,96^\circ)/5) = (\sin(75,96^\circ - 36,87^\circ)/5)$$

$$\sin(\theta - 75,96^\circ) = 0,6305 : . \theta - 75,96^\circ = 39,09 : . \theta = 115,05^\circ$$

$$V_{bt} = 7,75 \text{ m/s}$$

OUTRA MANEIRA

Lei dos cossenos:  $V_{br}^2 = V_{rt}^2 + V_{bt}^2 - 2 V_{rt} V_{bt} \cos(\alpha - \phi)$  resolvemos a equação do 2º grau em  $V_{bt}$

2) Demonstrar que  $\mathbf{u}_r = \cos(\theta) \mathbf{u}_z + \sin(\theta) \cos(\phi) \mathbf{u}_x + \sin(\theta) \sin(\phi) \mathbf{u}_y$

Solução:

Como desejamos decompor  $\mathbf{u}_r$  (das coordenadas esféricas) nas direções de  $\mathbf{u}_x$ ,  $\mathbf{u}_y$ ,  $\mathbf{u}_z$  então

$$\mathbf{u}_r = (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_x) \mathbf{u}_x + (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_y) \mathbf{u}_y + (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_z) \mathbf{u}_z$$

Como  $(\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_x) = (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_{xy}) (\mathbf{u}_{xy} \cdot \mathbf{u}_x) = \cos(90-\theta) \cos(\phi) = \sin(\theta) \cos(\phi)$

$$(\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_y) = (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_{xy}) (\mathbf{u}_{xy} \cdot \mathbf{u}_y) = \cos(90-\theta) \sin(\phi) = \sin(\theta) \sin(\phi)$$

$$(\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_z) = \cos(\theta)$$

$$\mathbf{u}_r = \sin(\theta) \cos(\phi) \mathbf{u}_x + \sin(\theta) \sin(\phi) \mathbf{u}_y + \cos(\theta) \mathbf{u}_z$$

3) Demonstrar que  $\mathbf{u}_x = \cos(\phi) \sin(\theta) \mathbf{u}_r - \sin(\phi) \mathbf{u}_\phi + \cos(\phi) \cos(\theta) \mathbf{u}_\theta$

Como desejamos decompor  $\mathbf{u}_x$  nas direções de  $\mathbf{u}_r$ ,  $\mathbf{u}_\theta$ ,  $\mathbf{u}_\phi$  então

Como  $(\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_r) = (\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_{xy}) (\mathbf{u}_{xy} \cdot \mathbf{u}_r) = \cos(\phi) \cos(90-\theta) = \cos(\phi) \sin(\theta)$

$$(\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_\phi) = \cos(90 + \phi) = -\sin(\phi)$$

$$(\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_\theta) = (\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_{xy}) (\mathbf{u}_{xy} \cdot \mathbf{u}_\theta) = \cos(\phi) \cos(\theta)$$

$$\mathbf{u}_x = \cos(\phi) \sin(\theta) \mathbf{u}_r - \sin(\phi) \mathbf{u}_\phi + \cos(\phi) \cos(\theta) \mathbf{u}_\theta$$

4) Demonstrar que  $\mathbf{W} = w_\phi \cos(\theta) \mathbf{u}_r - w_\phi \sin(\theta) \mathbf{u}_\theta + w_\theta \mathbf{u}_\phi$

Como  $\mathbf{W} = w_\phi \mathbf{u}_z + w_\theta \mathbf{u}_\phi$  pois  $\mathbf{W} = w_\phi \mathbf{u}_{pd\phi} + w_\theta \mathbf{u}_{pd\theta}$

devemos decompor  $\mathbf{u}_z$  em  $\mathbf{u}_r$ ,  $\mathbf{u}_\theta$ ,  $\mathbf{u}_\phi$

$$\mathbf{u}_z = (\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_r) \mathbf{u}_r + (\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_\theta) \mathbf{u}_\theta + (\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_\phi) \mathbf{u}_\phi$$

$$\mathbf{u}_z = \cos(\theta) \mathbf{u}_r + \cos(90+\theta) \mathbf{u}_\theta + 0 \mathbf{u}_\phi = \cos(\theta) \mathbf{u}_r - \sin(\theta) \mathbf{u}_\theta$$

$$\text{Então } \mathbf{W} = w_\phi \cos(\theta) \mathbf{u}_r - w_\phi \sin(\theta) \mathbf{u}_\theta + w_\theta \mathbf{u}_\phi$$

5) Demonstrar que  $d\mathbf{u}_r/dt = \mathbf{W} * \mathbf{u}_r$

Como  $\mathbf{u}_r = \text{Sin}(\theta) \text{Cos}(\phi) \mathbf{u}_x + \text{Sin}(\theta) \text{Sin}(\phi) \mathbf{u}_y + \text{Cos}(\theta) \mathbf{u}_z$

$d\mathbf{u}_r/dt = - \text{Sin}(\theta) (d\theta/dt) \mathbf{u}_z + \mathbf{u}_x \text{Cos}(\phi) \text{Cos}(\theta) (d\theta/dt) -$

$\mathbf{u}_x \text{Sin}(\theta) \text{Sin}(\phi) (d\phi/dt) + \mathbf{u}_y \text{Sin}(\theta) \text{Cos}(\phi) (d\phi/dt) +$

$\mathbf{u}_y \text{Sin}(\phi) \text{Cos}(\theta) (d\theta/dt)$

$d\mathbf{u}_r/dt = (d\theta/dt) \mathbf{u}_\theta + \text{Sin}(\theta) (d\phi/dt) \mathbf{u}_\phi$  porque:

$\mathbf{u}_\theta = \text{Cos}(\theta) \text{Cos}(\phi) \mathbf{u}_x + \text{Cos}(\theta) \text{Sin}(\phi) \mathbf{u}_y - \text{Sin}(\theta) \mathbf{u}_z$

$\mathbf{u}_\phi = \mathbf{u}_y \text{Cos}(\phi) - \mathbf{u}_x \text{Sin}(\phi)$

Como  $\mathbf{W} = w_\theta \mathbf{u}_\phi + w_\phi \mathbf{u}_z$

$d\mathbf{u}_r/dt = \mathbf{W} * \mathbf{u}_r = (w_\theta \mathbf{u}_\phi + w_\phi \mathbf{u}_z) * \mathbf{u}_r = w_\theta \mathbf{u}_\theta + w_\phi \text{Sin}(\theta) \mathbf{u}_\phi$

Generalizando  $d\mathbf{u}/dt = \mathbf{W} * \mathbf{u}$  ou seja  $d\mathbf{u} = d\beta * \mathbf{u}$

Observação : Sabemos que podemos decompor um vetor qualquer em seus componentes, logo por exemplo  $d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_r + d\mathbf{r}_\beta = d\mathbf{r}_r + d\mathbf{r}_\theta + d\mathbf{r}_\phi$

Onde  $d\mathbf{r}_r = dr \mathbf{u}_r$  ;  $d\mathbf{r}_\theta = r d\theta \mathbf{u}_\theta$  ;  $d\mathbf{r}_\phi = r \text{Sin}(\theta) d\phi \mathbf{u}_\phi$

6) Demonstrar que  $\mathbf{v} = (dr/dt) \mathbf{u}_r + r (d\theta/dt) \mathbf{u}_\theta + r \text{Sin}(\theta) (d\phi/dt) \mathbf{u}_\phi$

Como  $\mathbf{r} = r \mathbf{u}_r$  então  $d\mathbf{r} = r d\mathbf{u}_r + \mathbf{u}_r dr$

$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = r d\mathbf{u}_r/dt + \mathbf{u}_r dr/dt = r (\mathbf{W} * \mathbf{u}_r) + \mathbf{u}_r dr/dt$

$\mathbf{v} = (dr/dt) \mathbf{u}_r + r (w_\theta \mathbf{u}_\phi + w_\phi \mathbf{u}_z) * \mathbf{u}_r$

$\mathbf{v} = (dr/dt) \mathbf{u}_r + r w_\theta \mathbf{u}_\theta + r w_\phi \text{Sin}(\theta) \mathbf{u}_\phi$

7) Demonstrar que  $\alpha = (\alpha_\phi \text{Cos}(\theta) - w_\phi w_\theta \text{Sin}(\theta)) \mathbf{u}_r - (\alpha_\phi \text{Sin}(\theta) + w_\phi w_\theta \text{Cos}(\theta)) \mathbf{u}_\theta + \alpha_\theta \mathbf{u}_\phi$

Como  $\alpha = d\mathbf{W}/dt$  e  $\mathbf{W} = w_\theta \mathbf{u}_\phi + w_\phi \mathbf{u}_z$  então :

$\alpha = (dw_\theta/dt) \mathbf{u}_\phi + w_\theta (d\mathbf{u}_\phi/dt) + (dw_\phi/dt) \mathbf{u}_z$

$\alpha = \alpha_\theta \mathbf{u}_\phi + w_\theta (\mathbf{W} * \mathbf{u}_\phi) + \alpha_\phi \mathbf{u}_z$

$\alpha = \alpha_\theta \mathbf{u}_\phi + w_\theta (w_\theta \mathbf{u}_\phi + w_\phi \mathbf{u}_z) * \mathbf{u}_\phi + \alpha_\phi (\text{Cos}(\theta) \mathbf{u}_r - \text{Sin}(\theta) \mathbf{u}_\theta)$

Prof. Everton Gomes de Santana

$$\alpha = \alpha_\theta \mathbf{u}_\phi + w_\theta w_\phi (\cos(\theta) \mathbf{u}_r - \sin(\theta) \mathbf{u}_\theta) * \mathbf{u}_\phi + \alpha_\phi \cos(\theta) \mathbf{u}_r - \alpha_\phi \sin(\theta) \mathbf{u}_\theta$$

$$\alpha = (\alpha_\phi \cos(\theta) - w_\theta w_\phi \sin(\theta)) \mathbf{u}_r - (\alpha_\phi \sin(\theta) + w_\theta w_\phi \cos(\theta)) \mathbf{u}_\theta + \alpha_\theta \mathbf{u}_\phi$$

8) Demonstre que  $(d\mathbf{A}'/dt)_{ng} = (d\mathbf{A}'/dt)_g + \mathbf{w}_0 * \mathbf{A}'$  onde  $\mathbf{A}'$  é um vetor medido por  $K'$  que gira com velocidade angular  $\mathbf{w}_0$  em relação a  $K$ .

Como  $\mathbf{A}' = A_x' \mathbf{u}_x' + A_y' \mathbf{u}_y' + A_z' \mathbf{u}_z'$  e os vetores unitários mudam de direção com o tempo, então :

$$(d\mathbf{A}'/dt)_{ng} = A_x' d\mathbf{u}_x'/dt + \mathbf{u}_x' dA_x'/dt + A_y' d\mathbf{u}_y'/dt + \mathbf{u}_y' dA_y'/dt + A_z' d\mathbf{u}_z'/dt + \mathbf{u}_z' dA_z'/dt$$

$$(d\mathbf{A}'/dt)_{ng} = \mathbf{u}_x' dA_x'/dt + \mathbf{u}_y' dA_y'/dt + \mathbf{u}_z' dA_z'/dt + A_x' d\mathbf{u}_x'/dt + A_y' d\mathbf{u}_y'/dt + A_z' d\mathbf{u}_z'/dt$$

Como  $d\mathbf{u}'/dt = \mathbf{w}_0 * \mathbf{u}'$  então

$$(d\mathbf{A}'/dt)_{ng} = (d\mathbf{A}'/dt)_g + A_x' (\mathbf{w}_0 * \mathbf{u}_x') + A_y' (\mathbf{w}_0 * \mathbf{u}_y') + A_z' (\mathbf{w}_0 * \mathbf{u}_z')$$

$$(d\mathbf{A}'/dt)_{ng} = (d\mathbf{A}'/dt)_g + \mathbf{w}_0 * \mathbf{A}'$$

9) Demonstre a equação da aceleração em coordenadas esféricas.

Podemos partir da equação  $\mathbf{r} = r \mathbf{u}_r$  ou então da equação da velocidade em coordenadas esféricas já demonstrada no quinto exercício.

Partindo de  $\mathbf{r} = r \mathbf{u}_r$

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = r d\mathbf{u}_r/dt + \mathbf{u}_r dr/dt = r (\mathbf{w} * \mathbf{u}_r) + \mathbf{u}_r dr/dt$$

$$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = r d(\mathbf{w} * \mathbf{u}_r)/dt + (\mathbf{w} * \mathbf{u}_r) dr/dt + \mathbf{u}_r d^2 r/dt^2 + (dr/dt) d\mathbf{u}_r/dt$$

$$\mathbf{a} = r ((d\mathbf{w}/dt) * \mathbf{u}_r + \mathbf{w} * d\mathbf{u}_r/dt) + (\mathbf{w} * \mathbf{u}_r) dr/dt + \mathbf{u}_r d^2 r/dt^2 + (dr/dt) d\mathbf{u}_r/dt$$

$$\mathbf{a} = r (\alpha * \mathbf{u}_r + \mathbf{w} * (\mathbf{w} * \mathbf{u}_r)) + (\mathbf{w} * \mathbf{u}_r) dr/dt + \mathbf{u}_r d^2 r/dt^2 + (dr/dt) (\mathbf{w} * \mathbf{u}_r)$$

$$\mathbf{a} = \alpha * \mathbf{r} + \mathbf{w} * (\mathbf{w} * \mathbf{r}) + 2 (dr/dt) \mathbf{w} * \mathbf{u}_r + \mathbf{u}_r d^2 r/dt^2$$

Substituindo a expressão de  $\alpha$  e de  $W$  na equação vetorial acima

$$\mathbf{a} = ((\alpha_\phi \cos(\theta) - w_\theta w_\phi \sin(\theta)) \mathbf{u}_r - (\alpha_\phi \sin(\theta) + w_\theta w_\phi \cos(\theta)) \mathbf{u}_\theta + \alpha_\theta \mathbf{u}_\phi) * r \mathbf{u}_r + (w_\theta \mathbf{u}_\phi + w_\phi \mathbf{u}_z) * ((w_\theta \mathbf{u}_\phi + w_\phi \mathbf{u}_z) * r \mathbf{u}_r) + 2 (dr/dt)(w_\phi \mathbf{u}_z + w_\theta \mathbf{u}_\phi) * \mathbf{u}_r + \mathbf{u}_r d^2r/dt^2$$

$$\mathbf{a} = (\alpha_\phi r \sin(\theta) + r w_\theta w_\phi \cos(\theta)) \mathbf{u}_\phi + r \alpha_\theta \mathbf{u}_\theta + 2 (dr/dt) w_\phi \sin(\theta) \mathbf{u}_\phi + 2 (dr/dt) w_\theta \mathbf{u}_\theta + (w_\theta \mathbf{u}_\phi + w_\phi \mathbf{u}_z) * (r w_\theta \mathbf{u}_\theta + r w_\phi \sin(\theta) \mathbf{u}_\phi) + \mathbf{u}_r d^2r/dt^2$$

$$\mathbf{a} = (\alpha_\phi r \sin(\theta) + r w_\theta w_\phi \cos(\theta)) \mathbf{u}_\phi + r \alpha_\theta \mathbf{u}_\theta + 2 (dr/dt) w_\phi \sin(\theta) \mathbf{u}_\phi + 2 (dr/dt) w_\theta \mathbf{u}_\theta - r w_\theta^2 \mathbf{u}_r + r w_\theta w_\phi \cos(\theta) \mathbf{u}_\phi - r w_\phi^2 \sin(\theta) \mathbf{u}_{xy} + \mathbf{u}_r d^2r/dt^2$$

$$\mathbf{a} = (\alpha_\phi r \sin(\theta) + r w_\theta w_\phi \cos(\theta)) \mathbf{u}_\phi + r \alpha_\theta \mathbf{u}_\theta + 2 (dr/dt) w_\phi \sin(\theta) \mathbf{u}_\phi + 2 (dr/dt) w_\theta \mathbf{u}_\theta - r w_\theta^2 \mathbf{u}_r + r w_\theta w_\phi \cos(\theta) \mathbf{u}_\phi - r w_\phi^2 \sin(\theta) (\cos(\theta) \mathbf{u}_\theta + \sin(\theta) \mathbf{u}_r) + \mathbf{u}_r d^2r/dt^2$$

$$\mathbf{a} = (d^2r/dt^2 - r w_\theta^2 - r w_\phi^2 \sin^2(\theta)) \mathbf{u}_r + (r \alpha_\theta - r w_\phi^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + 2 (dr/dt) w_\theta) \mathbf{u}_\theta + (2 r w_\theta w_\phi \cos(\theta) + 2(dr/dt) w_\phi \sin(\theta) + r \sin(\theta) \alpha_\phi) \mathbf{u}_\phi$$

Obs : Se a partícula desloca-se no plano xy então :

$$\alpha = -\alpha_\phi \mathbf{u}_\theta \quad \text{e} \quad \mathbf{W} = w_\phi \mathbf{u}_z = -w_\phi \mathbf{u}_\theta$$

$$\text{Logo } \mathbf{a} = r \alpha_\phi \mathbf{u}_\phi - r w_\phi^2 \mathbf{u}_r + 2 (dr/dt) w_\phi \mathbf{u}_\phi + \mathbf{u}_r d^2r/dt^2$$

$$\mathbf{a} = (d^2r/dt^2 - r w_\phi^2) \mathbf{u}_r + (2 (dr/dt) w_\phi + r \alpha_\phi) \mathbf{u}_\phi$$

Obs : Se a partícula desloca-se com MCUV então da equação vetorial da aceleração temos para  $r = \text{constante}$

$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} * \mathbf{r} + \mathbf{W} * (\mathbf{W} * \mathbf{r})$  Se  $r = \text{constante}$  e  $\theta = \text{constante}$  então :

Em coordenadas esféricas

$$\mathbf{a} = -r \omega_\phi^2 \sin(\theta) \mathbf{u}_r - r \omega_\phi^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \mathbf{u}_\theta + r \sin(\theta) \alpha_\phi \mathbf{u}_\phi$$

Em coordenadas cilíndricas :  $\mathbf{a} = r \sin(\theta) \alpha_\phi \mathbf{u}_\phi - r \omega_\phi^2 \sin(\theta) \mathbf{u}_R$

10) Encontre as componentes normal e tangencial do vetor aceleração se a partícula desloca-se no plano xy.

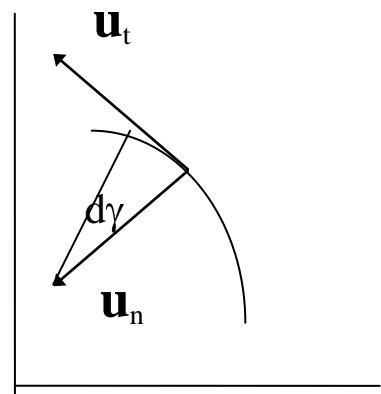
Como  $\mathbf{v} = v \mathbf{u}_t$  então  $d\mathbf{v}/dt = (dv/dt) \mathbf{u}_t + v d\mathbf{u}_t/dt$

$$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = (dv/dt) \mathbf{u}_t + v \mathbf{W} * \mathbf{u}_t$$

$$\mathbf{a} = (dv/dt) \mathbf{u}_t + v \omega_\gamma \mathbf{u}_z * \mathbf{u}_t \quad \text{onde } \omega_\gamma = d\gamma/dt$$

$$\mathbf{a} = (dv/dt) \mathbf{u}_t + v \omega_\gamma \mathbf{u}_n \quad \text{onde } v = \omega_\gamma \rho \sin(90)$$

$$\mathbf{a} = (dv/dt) \mathbf{u}_t + \omega_\gamma^2 \rho \mathbf{u}_n$$



Outra maneira :  $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = d(v \mathbf{u}_t)/dt = \mathbf{u}_t dv/dt + v d\mathbf{u}_t/dt$

Como  $\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_x \cos(\gamma) + \mathbf{u}_y \sin(\gamma)$ ;  $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_x \cos(90+\gamma) + \mathbf{u}_y \sin(90+\gamma)$

$$\mathbf{u}_n = -\mathbf{u}_x \sin(\gamma) + \mathbf{u}_y \cos(\gamma)$$

$$d\mathbf{u}_t/dt = -\mathbf{u}_x \sin(\gamma) (d\gamma/dt) + \mathbf{u}_y \cos(\gamma) (d\gamma/dt) = \mathbf{u}_n d\gamma/dt = \mathbf{u}_n \omega_\gamma$$

Sabemos que  $d\gamma/dt = (d\gamma/ds) (ds/dt) = (d\gamma/ds) v$

Como  $ds = \rho d\gamma \therefore d\gamma/dt = v/\rho \therefore d\mathbf{u}_t/dt = \mathbf{u}_n v/\rho$

$$\mathbf{a} = (dv/dt) \mathbf{u}_t + v^2/\rho \mathbf{u}_n = a_t \mathbf{u}_t + a_n \mathbf{u}_n$$

11) Um observador O' (não inercial) cujos eixos x' e y' giram com MCU com velocidade angular  $\mathbf{w} = 2 \mathbf{u}_z$  rad/s e a origem translada-se em relação a O (inercial) de acordo com a equação  $\mathbf{R} = 3t \mathbf{u}_x + (4t - 5t^2) \mathbf{u}_y$ . O observador O' encontra a seguinte equação para o movimento da partícula  $\mathbf{r}' = 5t \mathbf{u}_{x'} + (6t - 5t^2) \mathbf{u}_{z'}$ . Qual a equação da posição e velocidade em função do tempo medidas pelo referencial inercial.

Solução:  $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'$ :  $\mathbf{r} = 3t \mathbf{u}_x + (4t - 5t^2) \mathbf{u}_y + 5t \mathbf{u}_{x'} + (6t - 5t^2) \mathbf{u}_{z'}$

Expressando  $\mathbf{u}_{x'}$  em termos de  $\mathbf{u}_x$  e  $\mathbf{u}_y$  temos:  $\mathbf{u}_{x'} = \mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_y$

$\mathbf{u}_{x'} = \cos(\theta) \mathbf{u}_x + \sin(\theta) \mathbf{u}_y$  onde  $\theta = \omega t$ :  $\mathbf{u}_{x'} = \cos(\omega t) \mathbf{u}_x + \sin(\omega t) \mathbf{u}_y$

e  $\mathbf{u}_{y'} = \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_y$  logo:  $\mathbf{u}_{y'} = -\sin(\theta) \mathbf{u}_x + \cos(\theta) \mathbf{u}_y$

Então:  $\mathbf{u}_{y'} = -\sin(\omega t) \mathbf{u}_x + \cos(\omega t) \mathbf{u}_y$

Substituindo  $\mathbf{u}_{x'}$  e  $\mathbf{u}_{y'}$  na equação do vetor posição  $\mathbf{r}$  temos:

$$\mathbf{r} = (3t + 5t \cos(2t)) \mathbf{u}_x + (4t - 5t^2 + 5t \sin(2t)) \mathbf{u}_y + (6t - 5t^2) \mathbf{u}_z$$

O vetor velocidade pode ser encontrado derivando o vetor posição ou aplicando a equação de movimento relativo para a grandeza velocidade.

Derivando o vetor posição em relação ao tempo.

$$\mathbf{v} = (3 + 5 \cos(2t) - 10t \sin(2t)) \mathbf{u}_x + (4 - 10t + 5 \sin(2t) + 10t \cos(2t)) \mathbf{u}_y + (6 - 10t) \mathbf{u}_z$$

Equação de movimento relativo para a grandeza velocidade.

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}' + \mathbf{w} * \mathbf{r}'$$

$$\mathbf{v} = 3 \mathbf{u}_x + (4 - 10t) \mathbf{u}_y + 5 \mathbf{u}_{x'} + (6 - 10t) \mathbf{u}_{z'} + 2 \mathbf{u}_z * (5t \mathbf{u}_{x'} + (6t - 5t^2) \mathbf{u}_{z'})$$

$$\mathbf{v} = 3 \mathbf{u}_x + (4 - 10t) \mathbf{u}_y + 5 \mathbf{u}_{x'} + (6 - 10t) \mathbf{u}_{z'} + 10t \mathbf{u}_{y'}$$

Substituindo  $\mathbf{u}_{x'}$  e  $\mathbf{u}_{y'}$  em termos de  $\mathbf{u}_x$  e  $\mathbf{u}_y$

$$\mathbf{v} = 3\mathbf{u}_x + (4 - 10t)\mathbf{u}_y + 5(\cos(2t)\mathbf{u}_x + \sin(2t)\mathbf{u}_y) + (6 - 10t) \mathbf{u}_{z'} + 10t(-\sin(2t)\mathbf{u}_x + \cos(2t)\mathbf{u}_y)$$

$$\mathbf{v} = (3 + 5 \cos(2t) - 10t \sin(2t)) \mathbf{u}_x + (4 - 10t + 5 \sin(2t) + 10t \cos(2t)) \mathbf{u}_y + (6 - 10t) \mathbf{u}_z$$

O vetor aceleração pode ser encontrado derivando o vetor velocidade ou aplicando a equação de movimento relativo para a grandeza aceleração.

Equação de movimento relativo para a grandeza aceleração.

$$\mathbf{a} = \mathbf{A} + \mathbf{a}' + 2 \mathbf{w} * \mathbf{v}' + \mathbf{w} * (\mathbf{w} * \mathbf{r}') + (\mathbf{dw}/\mathbf{dt}) * \mathbf{r}'$$

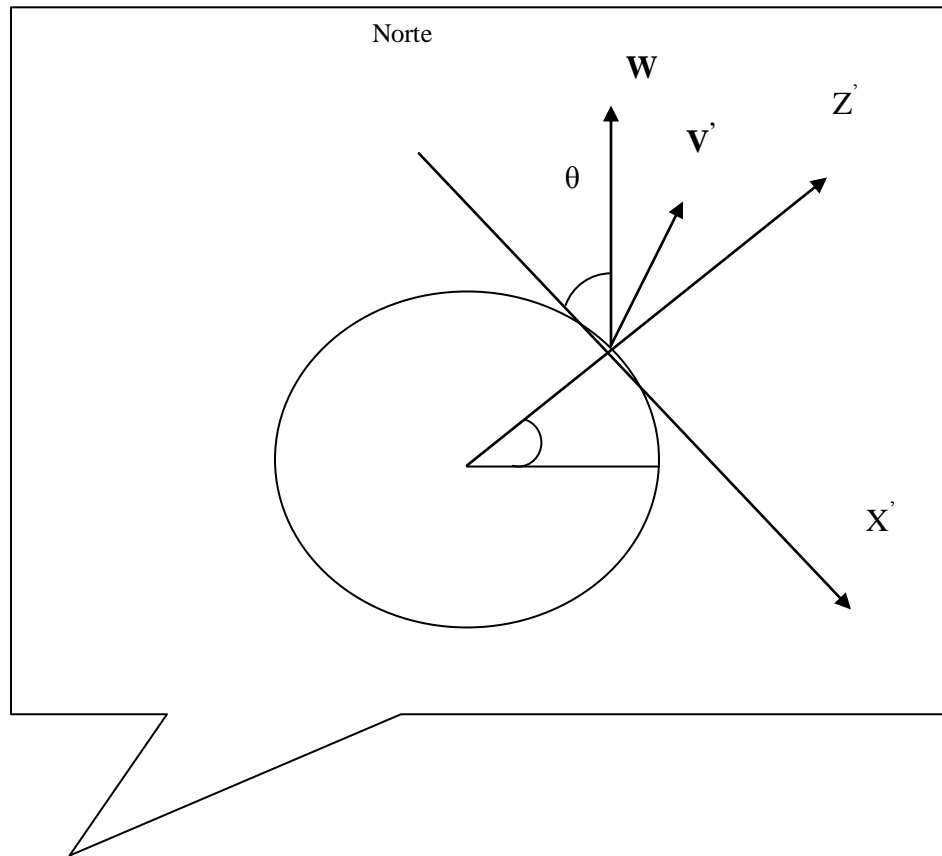
$$\mathbf{a} = -10\mathbf{u}_y - 10\mathbf{u}_z + 2(2 \mathbf{u}_z) * (5\mathbf{u}_{x'} + (6 - 10t)\mathbf{u}_{z'}) + (2\mathbf{u}_z * (2\mathbf{u}_z * (5t\mathbf{u}_{x'} + (6t - 5t^2) \mathbf{u}_{z'})))$$

$$\mathbf{a} = -10 \mathbf{u}_y - 10 \mathbf{u}_z + 20 \mathbf{u}_{y'} + (2 \mathbf{u}_z * 10t \mathbf{u}_{x'}) = -10 \mathbf{u}_y - 10 \mathbf{u}_z + 20 \mathbf{u}_{y'} - 20t \mathbf{u}_{x'}$$

$$\mathbf{a} = -10 \mathbf{u}_y - 10 \mathbf{u}_z + 20 (-\sin(\theta)\mathbf{u}_x + \cos(\theta)\mathbf{u}_y) - 20t (\cos(\theta)\mathbf{u}_x + \sin(\theta)\mathbf{u}_y)$$

$$\mathbf{a} = (-20 \sin(2t) - 20t \cos(2t))\mathbf{u}_x + (-10 + 20 \cos(2t) - 20t \sin(2t))\mathbf{u}_y - 10 \mathbf{u}_z$$

12) Aplicação mostrando a influência da força de Coriolis sobre uma partícula na latitude norte  $\theta$ .



Na figura acima o eixo y positivo é perpendicular ao plano e penetrando na página, o ângulo  $\theta$  é a latitude do lugar e o plano da terra é o plano XY e  $V'$  é a velocidade da partícula medida pelo referencial no centro da terra que gira com velocidade angular  $W$  relativo a um referencial inercial no centro da terra. Considere o vetor  $V' = V'_x U_x + V'_y U_y + V'_z U_z$  e  $W = W_x U_x + W_z U_z$  então a força de coriolis é dada por:  $F = - 2 m W \times V' = - 2 m W V' \sin(\alpha) U$

Solução:

$$F = - 2 m W \times V' : . F = - 2 m (W_x U_x + W_z U_z) \times (V'_x U_x + V'_y U_y + V'_z U_z)$$

$$F = 2 m W_z V'_y U_x + (2 m W_x V'_z - 2 m W_z V'_x) U_y - 2 m W_x V'_y U_z \quad (\text{Eq 1})$$

Onde na Eq 1 acima  $V'_x$ ,  $V'_y$ ,  $V'_z$  e  $W_x$ ,  $W_z$  podem ser positivos ou negativos.

Casos Particulares:

1) Se  $V' = - |V'_x| U_x$  ou seja a partícula desloca-se de sul para norte então pela Eq 1 temos  $F = - 2 m W_z (- V'_x) U_y : . F = 2 m W_z V'_x U_y$  onde agora  $W_z$  e  $V'_x$  são positivos e a força aponta para o leste (direção do eixo y positivo)

Outra maneira aplicando  $F = - 2 m W V' \sin(\alpha) U_y$  onde  $\alpha = (270 - (270 + \theta))$

$$F = - 2 m W V'_x \sin(270 - (270 + \theta)) U_y = 2 m W V'_x \sin(\theta) U_y$$

Como  $W_z = W \sin(\theta)$  então  $F = 2 m W_z V'_x U_y$

2) Se  $V' = - |V'_z| U_z$  ou seja a partícula é lançada para baixo então pela Eq 1 temos:  $F = 2 m (- W_x) (- V'_z) U_y = 2 m W_x V'_z U_y$  onde  $W_x$  e  $V'_z$  são positivos e a força aponta para leste (direção do eixo y positivo).

Outra maneira aplicando  $F = - 2 m W V' \sin(\alpha) U$  onde  $\alpha = 180 - (270 + \theta)$

$$F = - 2 m W V'_z \sin(180 - (270 + \theta)) U = 2 m W V'_z \cos(\theta) U_y$$

Como  $W_x = W \cos(\theta)$  então  $F = 2 m W_x V'_z U_y$

3) Se  $V' = V'_y U_y$  ou seja a partícula desloca-se de oeste para leste então pela Eq 1 temos

$$F = 2 m W_z V'_y U_x - 2 m W_x V'_y U_z : . F = 2 m W_z V'_y U_x - 2 m (- W_x) V'_y U_z$$

logo  $F = 2 m W_z V'_y U_x + 2 m W_x V'_y U_z$  onde agora  $W_x$  é positivo e a força

tem uma componente que aponta para o sul (direção do eixo x positivo) e a outra componente aponta para cima (direção do eixo z positivo)

Outra maneira aplicando  $\mathbf{F} = -2 m W V' \sin(\alpha) \mathbf{U}_{xz}$  onde  $\alpha = (0 - 90)$

$$\mathbf{F} = 2 m W V_y' \mathbf{U}_{xz} \text{ onde } W = \text{RaizQ}(W_x^2 + W_z^2)$$

13) Responda a questão anterior se a latitude for sul  $\theta$ .

$$\mathbf{F} = 2 m W_z V_y' \mathbf{U}_x + (2 m W_x V_z' - 2 m W_z V_x') \mathbf{U}_y - 2 m W_x V_y' \mathbf{U}_z \quad (\text{Eq 1})$$

Onde na Eq 1 acima  $V_x'$ ,  $V_y'$ ,  $V_z'$  e  $W_x$ ,  $W_z$  podem ser positivos ou negativos.

Casos Particulares:

1) Se  $\mathbf{V}' = - \left| V_x' \right| \mathbf{U}_x$  ou seja a partícula desloca-se de sul para norte então pela Eq 1 temos  $\mathbf{F} = -2 m (-W_z) (-V_x') \mathbf{U}_y : \mathbf{F} = -2 m W_z V_x' \mathbf{U}_y$  onde agora  $W_z$  e  $V_x'$  são positivos e a força aponta para o oeste (direção do eixo y negativo)

Outra maneira aplicando  $\mathbf{F} = -2 m W V' \sin(\alpha) \mathbf{U}$  onde  $\alpha = (270 - (270 - \theta))$   
 $\mathbf{F} = -2 m W V_x' \sin(270 - (270 - \theta)) \mathbf{U}_y = -2 m W V_x' \sin(\theta) \mathbf{U}_y$

Como  $W_z = W \sin(\theta)$  então  $\mathbf{F} = -2 m W_z V_x' \mathbf{U}_y$

2) Se  $\mathbf{V}' = - \left| V_z' \right| \mathbf{U}_z$  ou seja a partícula é lançada para baixo então pela Eq 1 temos:  $\mathbf{F} = 2 m (-W_x) (-V_z') \mathbf{U}_y = 2 m W_x V_z' \mathbf{U}_y$  onde  $W_x$  e  $V_z'$  são positivos e a força aponta para leste (direção do eixo y positivo).

Outra maneira aplicando  $\mathbf{F} = -2 m W V' \sin(\alpha) \mathbf{U}$  onde  $\alpha = 180 - (270 - \theta)$

$$\mathbf{F} = -2 m W V_z' \sin(180 - (270 - \theta)) \mathbf{U} = 2 m W V_z' \cos(\theta) \mathbf{U}_y$$

Como  $W_x = W \cos(\theta)$  então  $\mathbf{F} = 2 m W_x V_z' \mathbf{U}_y$

3) Se  $\mathbf{V}' = V_y' \mathbf{U}_y$  ou seja a partícula desloca-se de oeste para leste então pela Eq 1 temos

$$\mathbf{F} = 2 m W_z V_y' \mathbf{U}_x - 2 m W_x V_y' \mathbf{U}_z : \mathbf{F} = 2 m (-W_z) V_y' \mathbf{U}_x - 2 m (-W_x) V_y' \mathbf{U}_z$$

logo  $\mathbf{F} = -2 m W_z V_y' \mathbf{U}_x + 2 m W_x V_y' \mathbf{U}_z$  onde agora  $W_x$  e  $W_z$  são positivos e a força tem uma componente que aponta para o norte (direção do eixo x negativo) e a outra componente aponta para cima (direção do eixo z positivo)

Outra maneira aplicando  $\mathbf{F} = -2 m W V' \sin(\alpha) \mathbf{U}$  onde  $\alpha = (0 - 90)$

$\mathbf{F} = 2 m W V_y' \mathbf{U}$  onde  $W = \text{RaizQ}(W_x^2 + W_z^2)$  lembrando que  $\mathbf{U}$  está no plano xz com a componente x negativa e a componente z positiva.

14) Lança-se um projétil com a velocidade  $V_0 = 10 \text{ m/s}$  formando um ângulo  $\theta$  com a horizontal e que mira uma maçã que, dista  $L = 2 \text{ m}$  do ponto de lançamento. No instante do lançamento do projétil a maçã cai e é atingida pelo projétil nas coordenadas  $(1,732; y_1)$  no instante  $t$ . Encontre o valor de  $\theta$  e de  $y_1$ , de  $t$  e de que altura  $y_0$  objeto cai. Resp:  $y_1 = 0,8 \text{ m}$  e  $\theta = 30^\circ$ ,  $t = 0,2 \text{ s}$ ,  $y_0 = 1 \text{ m}$ . Dado:  $g = 10 \text{ m/s}^2$

Solução: É um problema de ponto de encontro, logo a posição  $y_p$  do projétil é igual a posição  $y_m$  da maçã.

$$Y_p = y_0 - g t^2/2 \text{ e } y_m = V_0 \text{ sen } (\theta) t - g t^2/2 : \cdot y_p = y_m : \cdot y_0 = V_0 \text{ sen } (\theta) t$$

Por que será que resultou numa equação do MRU com velocidade  $V_y = V_0 \text{ sen } (\theta)$  ? Observe que  $y_0 = L \text{ sen } (\theta)$  e substituindo na equação  $y_0 = V_0 \text{ sen } (\theta) t$  obtemos  $L = V_0 t$ . Por que será?

$$2 = 10 t : \cdot t = 0,2 \text{ s}$$

Na direção  $x$  temos  $x_1 = V_0 \text{ cos } (\theta) t : \cdot 1,732 = 10 \text{ cos } (\theta) 0,2 : \cdot \text{ cos } (\theta) = 0,866 : \cdot \theta = 30^\circ : \cdot y_0 = 2 \text{ sen } (30) = 1 \text{ m}$ , e  $y_1 = y_0 - g t^2/2 : \cdot y_1 = 1 - 5 (0,2)^2 = 0,8 \text{ m}$ .

Será que o principio da inércia tem algo haver com este problema, e com o fato de que a lua está caindo aproximadamente 0,05 in em cada segundo, pense. Se a lua cai 0,05 in em cada segundo, porque ela não atinge a terra? PENSE.

15) Uma partícula desloca-se de acordo com a equação  $\mathbf{r}(t) = 2 t \mathbf{U}_x + 4 t^2 \mathbf{U}_y$  expresse:

- a equação da velocidade  $\mathbf{v}(t)$  em coordenadas cartesianas em  $t = 2 \text{ s}$ .
- a equação da velocidade em coordenadas polares no instante  $t = 2 \text{ s}$ .
- a equação da velocidade ao longo da tangente e da normal em  $t = 2 \text{ s}$ .
- a equação da aceleração em coordenadas cartesianas em  $t = 2 \text{ s}$ .
- a equação da aceleração em coordenadas polares em  $t = 2 \text{ s}$ .
- a equação da aceleração ao longo da tangente e da normal em  $t = 2 \text{ s}$ .

Solução: Sabemos que  $x(t) = 2 t$  e  $y(t) = 4 t^2$  logo  $y = x^2$

$$\text{a) } \mathbf{v}(t) = d \mathbf{r}(t)/dt = 2 \mathbf{U}_x + 8 t \mathbf{U}_y \text{ e } v(t) = \text{Raizq}(4 + 64 t^2) : \cdot v(2) = 2 \mathbf{U}_x + 16 \mathbf{U}_y : \cdot v(2) = 16,12$$

b) O ângulo entre o vetor posição e o vetor velocidade é  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = v r \cos (\psi)$   
 $= v_x x + v_y y$

$$\cos (\psi) = (2 \cdot 2 t + 8 t \cdot 4 t^2) / (\text{Raizq}(4 + 64 t^2) \text{Raizq}(4 t^2 + 16 t^4))$$

$$\cos (\psi(2)) = (2 \cdot 2 \cdot 2 + 8 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2^2) / (\text{Raizq}(4 + 64 \cdot 2^2) \text{Raizq}(4 \cdot 2^2 + 16 \cdot 2^4))$$

$$\cos (\psi(2)) = 264 / 265,93 = 0,9927 : \psi(2) = 6,91^\circ$$

$$v_r (2) = v(2) \cos (\psi(2)) = 16 \text{ e } v_\phi (2) = v(2) \sin (\psi(2)) = 1,94$$

$$\mathbf{v}(2) = 16 \mathbf{U}_r + 1,94 \mathbf{U}_\phi$$

OUTRA MANEIRA

$$\mathbf{v} = dr/dt \mathbf{U}_r + r \omega \mathbf{U}_\phi : r(2) = 16,49 \text{ e } \text{tg} (\phi) = y/x = 2 t : \phi = \text{arc tg } 2 t :$$

$$d\phi/dt = 2/(1+4t^2)$$

$$\omega(2) = 2/17 \text{ e } r(t) = \text{Raizq}(4 t^2 + 16 t^4) : \text{ e } \phi(2) = 75,96^\circ \text{ e } dr/dt = v_r = (8t + 64t^3)/(4 t^2 + 16 t^4)^{1/2}$$

$$v_r (2) = 528/32,985 = 16 \text{ e } v_\phi (2) = r(2) \omega(2) = 16,49 \cdot 2/17 = 1,94$$

c)  $\text{tg} (\theta) = dy/dx : \theta = \text{arc tg} (dy/dx) : d\theta = d^2y/dx^2 / (1 + (dy/dx)^2) dx$   
 $d\theta = ds/\rho : \rho = ds/d\theta : \rho = \text{Raizq}((dx)^2 + (dy)^2) / d\theta : \theta = \text{arc tg } 4t$   
 $: d\theta/dt = 4/(1+16 t^2) = \omega$

$$\rho = dx \text{Raizq}(1 + (dy/dx)^2) / (d^2y/dx^2 / (1 + (dy/dx)^2)) dx : .$$

$$\rho = (1 + (dy/dx)^2)^{3/2} / d^2y/dx^2$$

$$\mathbf{v} = \rho d\theta/dt \mathbf{U}_t = \rho \omega \mathbf{U}_t : \rho(2) = 262,02 \text{ e } \omega(2) = 0,061538$$

$$\mathbf{v} = 16,12 \mathbf{U}_t$$

d)  $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = 0 \mathbf{U}_x + 8 \mathbf{U}_y : a = 8$

e) ângulo entre  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{r}$  é  $\alpha$  onde  $\alpha = \delta + \psi : \alpha(2) = 7,13^\circ + 6,91^\circ = 14,04^\circ$

$$a_r (2) = a(2) \cos (\alpha (2)) = 8 \cos (14,04^\circ) = 7,76 \text{ e } a_\phi (2) = a(2) \sin (\alpha (2)) = 8 \sin (14,04^\circ) = 1,94$$

OUTRA MANEIRA

$$\mathbf{a} = (d^2r/dt^2 - r w^2) \mathbf{U}_r + (2 w v_r + r dw/dt) \mathbf{U}_\phi$$

f)  $\mathbf{a} = dv/dt \mathbf{U}_t + \rho w^2 \mathbf{U}_n$  onde  $w = d\theta/dt$

$$\mathbf{a}(2) = 7,94 \mathbf{U}_t + 0,992 \mathbf{U}_n$$

OUTRA MANEIRA

ângulo entre  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{v}$  é  $\delta$

$$\delta(2) = 90 - (\Psi + \phi)$$

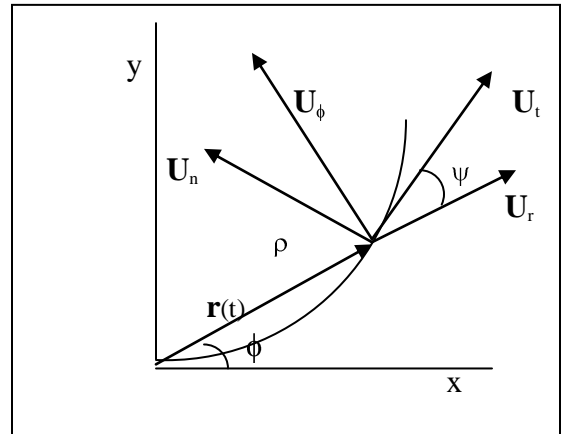
$$\delta(2) = 90 - (6,91^\circ + 75,96^\circ) = 7,13^\circ$$

$$a_t(2) = a(2) \cos(\delta(2)) = 8 \cos(7,13^\circ)$$

$$a_t(2) = 7,94$$

$$a_n(2) = a(2) \sin(\delta(2)) = 8 \sin(7,13^\circ)$$

$$a_n(2) = 0,992$$



16) Um barqueiro pretende atravessar um rio de largura 100 m em um barco cuja aceleração em águas paradas é constante e de  $1 \text{ m/s}^2$ . Se este barco for atravessar um rio em que a correnteza tem velocidade constante de  $3 \text{ m/s}$  para leste, em que direção deve o barco estar orientado para atingir um ponto diretamente a norte do ponto de partida se o barco partiu do repouso e o tempo gasto no percurso.

Solução:  $x_{bt} = x_{br} + x_{rt} \therefore x_{bt} = a_{br} \cos(\theta) t^2/2 + v_{rt} t \therefore 0 = \cos(\theta) t^2/2 + 3 t \therefore t = -6/\cos(\theta)$

$y_{bt} = y_{br} + y_{rt} \therefore Y_{bt} = a_{br} \sin(\theta) t^2/2 + 0 \therefore 100 = \sin(\theta) t^2/2 \therefore 200 = \sin(\theta) 36/\cos^2(\theta)$

$200 (1 - \sin^2(\theta)) = 36 \sin(\theta) \therefore 200 \sin^2(\theta) + 36 \sin(\theta) - 200 = 0$

$\sin(\theta) = (-36 + \text{raizq}(1296 + 160000))/400 = 0,914 \therefore \theta = 66,07^\circ$  (ângulo formado com o eixo x negativo porque o ângulo procurado deve ser um ângulo do 2º quadrante) logo o ângulo procurado é  $180^\circ - 66,07^\circ = 113,93^\circ \therefore$

$t = -6/\cos(113,93) = 14,79 \text{ s}$

**Prof: Everton Gomes de Santana**

17) A equação  $\mathbf{r}(t) = (3-t) \cos(2t) \mathbf{U}_x + (3-t) \sin(2t) \mathbf{U}_y$  é a equação da posição em função do tempo vista por um referencial inercial para o movimento de uma partícula. Qual a equação da posição em função do tempo desta partícula vista por alguém na origem de um carrocél que gira com velocidade angular constante  $\boldsymbol{\omega} = 2 \mathbf{U}_z$  medida pelo referencial inercial e com a origem fixa na do inercial.

Solução:  $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{R}(t) : \mathbf{R}(t) = 0 :$

$$\mathbf{r}'(t) = (3-t) \cos(2t) \mathbf{U}_x + (3-t) \sin(2t) \mathbf{U}_y$$

Como  $\mathbf{U}_x = \cos(2t) \mathbf{U}_x' - \sin(2t) \mathbf{U}_y'$  e  $\mathbf{U}_y = \sin(2t) \mathbf{U}_x' + \cos(2t) \mathbf{U}_y'$

$$\mathbf{r}'(t) = (3-t) \cos(2t) (\cos(2t) \mathbf{U}_x' - \sin(2t) \mathbf{U}_y') + (3-t) \sin(2t) (\sin(2t) \mathbf{U}_x' + \cos(2t) \mathbf{U}_y')$$

$\mathbf{r}'(t) = (3-t) \mathbf{U}_x'$  (A particular desloca-se com MRU ao longo do eixo x partindo de um ponto a 3 m da origem e deslocando-se em sentido contrário ao convencional positivo com velocidade de módulo 1m/s)

18) Quais as grandezas fundamentais da mecânica no sistema LMT e dê exemplos.

Solução: comprimento, massa, tempo.

Exemplos de sistemas LMT: CGS, MKS, Inglês

Equação dimensional do comprimento - L

Equação dimensional da massa - M

Equação dimensional do tempo - T

19) Quais as grandezas fundamentais da mecânica no sistema LFT e dê exemplos.

Solução: comprimento, força, tempo.

Exemplos de sistemas LFT: MKFS, Inglês técnico.

Equação dimensional do comprimento - L

Equação dimensional da força - F

Equação dimensional do tempo - T

20) O que devemos fazer para conhecermos a equação dimensional ou unidades das grandezas derivadas.

Solução:

- 1) conhecer a equação dimensional ou unidades das grandezas fundamentais
- 2) conhecer a fórmula de definição da grandeza derivada (variável dependente) em termos de unidades
- 3) reduzir as dimensões ou unidades das grandezas envolvidas na fórmula as dimensões das grandezas fundamentais.

21) Qual a importância do estudo das equações dimensionais.

Solução:

- a) Obtenção da relação entre as unidades
- b) Previsão de fórmulas – Toda formula física é dimensionalmente homogênea ou seja a equação dimensional de qualquer termo é igual a menos de uma constante
- c) Estudo de semelhança ( modelo e protótipo)

22) Qual a equação dimensional da área, volume, velocidade, aceleração, força, trabalho.

Solução: Área é o produto de duas dimensões: EQD(Área) = L<sup>2</sup>,

Volume é o produto de Três dimensões: EQD(Volume) = L<sup>3</sup>

Velocidade é a razão entre o comprimento e o tempo:EQD(velocidade)= LT<sup>-1</sup>

Aceleração é a razão entre a velocidade e o tempo:

EQD(aceleração) = LT<sup>-1</sup>/T = LT<sup>-2</sup>

Força é o produto da massa pela aceleração: F = m a = m v/t = m d/t<sup>2</sup> ∴

EQD(Força) = M LT<sup>-2</sup>

Trabalho é o produto da força pela distância: Tr = F d = m a d = m (v/t) d = m (d/t<sup>2</sup>) d; ∴ EQD(Trabalho) = M L<sup>2</sup> T<sup>-2</sup>

23) Se Potência é uma função da massa, aceleração e velocidade qual formula que relaciona estas grandezas.

Solução: Procuramos a fórmula do tipo P = C m<sup>k1</sup> a<sup>k2</sup> v<sup>k3</sup> ∴ Como Potência é trabalho/tempo então a equação dimensional da potência é:

EQD(Potência) = M L<sup>2</sup> T<sup>-3</sup>

M L<sup>2</sup> T<sup>-3</sup> = M<sup>k1</sup> (L T<sup>-2</sup>)<sup>k2</sup> (LT<sup>-1</sup>)<sup>k3</sup> ∴ M L<sup>2</sup> T<sup>-3</sup> = M<sup>k1</sup> L<sup>k2+k3</sup> T<sup>-2 k2 -k3</sup>

**Prof: Everton Gomes de Santana**

Logo para ser dimensionalmente homogênea os expoentes de cada grandeza devem ser iguais

$$1 = k_1 \quad ; \quad 2 = k_2 + k_3 \quad ; \quad -3 = -2k_2 - k_3 \quad \text{logo: } k_3 = 1 \text{ e } k_2 = 1$$

Logo a fórmula é:  $P = C M a v$

24) Se Potência é uma função da pressão, do volume e do tempo, qual a formula que relaciona estas grandezas.

Solução: Procuramos uma fórmula do tipo  $P = C p^{k_1} V^{k_2} t^{k_3}$

EQD(Potência) =  $M L^2 T^{-3}$  e a EQD(pressão) =  $M L^{-1} T^{-2}$

Logo:  $M L^2 T^{-3} = C (M L^{-1} T^{-2})^{k_1} (L^3)^{k_2} T^{k_3}$

$$M L^2 T^{-3} = C M^{k_1} L^{-k_1+3k_2} T^{-2k_1+k_3}$$

$$1 = k_1 \quad ; \quad 2 = -k_1+3k_2 \quad ; \quad -3 = -2k_1 + k_3 \quad \text{Então } k_2 = 1 \text{ e } k_3 = -1$$

A equação procurada é:  $P = C p V / t$

25) Se a potência por unidade de volume é uma função da massa específica, aceleração da gravidade e velocidade, qual a equação que relaciona estas grandezas.

Solução:

Procuramos uma fórmula do tipo  $P/V = C U^{k_1} g^{k_2} v^{k_3}$

EQD(Potencia/Volume) =  $M L^{-1} T^{-3}$  e a EQD(massa específica) =  $M L^{-3}$  e a

EQD(aceleração) =  $L T^{-2}$

EQD(velocidade) =  $L T^{-1}$  Logo:  $M L^{-1} T^{-3} = C (M L^{-3})^{k_1} (L T^{-2})^{k_2} (L T^{-1})^{k_3}$

$$M L^{-1} T^{-3} = M^{k_1} L^{-3k_1+k_2+k_3} T^{-2k_2-k_3}$$

$$1 = k_1 \quad \text{e} \quad -1 = -3k_1 + k_2 + k_3 \quad \text{e} \quad -3 = -2k_2 - k_3$$

$$\text{Cuja solução é } k_1 = 1 \quad \text{e} \quad k_2 = 1 \quad \text{e} \quad k_3 = 1$$

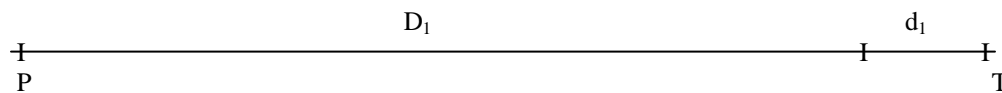
A equação procurada é:  $P/V = C U g v$

26) Dois trens trafegam no mesmo trilho, um em direção ao outro, cada um com uma velocidade escalar de  $V_t = 30 \text{ km/h}$ . Quando estão a  $d = 120 \text{ km}$  de distância um do outro, um pássaro que voa a  $V_p = 60 \text{ km/h}$  parte da frente de um trem para o outro. Alcançando o outro trem ele volta para o primeiro e assim por diante.

- a) Qual o tempo gasto para os trens se encontrarem.
- b) Quantas viagens o pássaro faz em 1,9990085505 h.
- c) Quantas viagens o passaro faz em 2 h.

**Prof: Everton Gomes de Santana**

1ª VIAGEM



$$d = D_1 + d_1 : .d = V_p * T_1 + V_t * T_1 : .T_1 = d / (V_t + V_p) = 120 / (30 + 60) = 4/3 \text{ h}$$

2ª VIAGEM



$$d = 2 * d_1 + d_2 + D_2 : . d = 2 * V_t * T_1 + V_t * T_2 + V_p * T_2$$

$$T_2 * (V_t + V_p) = d - 2 * V_t * T_1 : .$$

$$T_2 * (V_t + V_p) = d - 2 * V_t * (d / (V_t + V_p))$$

$$T_2 = T_1 * (1 - 2 * V_t / (V_t + V_p))$$

3ª VIAGEM



$$d = 2 * d_1 + 2 * d_2 + d_3 + D_3 : . d - 2 * d_1 - 2 * d_2 = d_3 + D_3$$

$$d - 2 * V_t * T_1 - 2 * V_t * T_2 = V_t * T_3 + V_p * T_3$$

$$T_3 = (d / (V_t + V_p)) - 2 * V_t * T_1 / (V_t + V_p) - 2 * V_t * T_2 / (V_t + V_p)$$

$$T_3 = T_1 - 2 * V_t * T_1 / (V_t + V_p) - 2 * V_t * T_2 / (V_t + V_p)$$

$$T_3 = T_1 * (1 - 2 * V_t / (V_t + V_p)) - 2 * V_t * T_2 / (V_t + V_p) : .$$

$$T_3 = T_2 - 2 * V_t * T_2 / (V_t + V_p)$$

$$T_3 = T_2 * (1 - 2 * V_t / (V_t + V_p))$$

GENERALIZANDO:  $T_N = T_{N-1} * (1 - (2 * V_t / (V_t + V_p)))$   
 $T_N = T_1 * (1 - (2 * V_t / (V_t + V_p)))^{N-1}$

Observe que os termos dos tempos de viagem estão em progressão geométrica e a fórmula da soma dos tempos é:  $S_N = a_1 * (1 - q^N) / (1 - q)$

onde  $a_1 = T_1 = d / (V_t + V_p) = 4/3$  e a razão  $q = (1 - 2 * V_t / (V_t + V_p)) = 1/3$  e quando o módulo da razão  $q < 1$  e N tende para infinito temos  $S_N = a_1 / (1 - q)$

Calculo do tempo gasto para os trens se encontrarem

Aplicando  $T = a_1 / (1 - q) = (4/3) / (1 - (1/3)) = 2 \text{ h}$

**Prof: Everton Gomes de Santana**

Aplicando  $X_A = V_t * T = 30 * T$  e  $X_B = 120 - 30 * T$

Logo no ponto de encontro  $X_A = X_B : .T = 2$  h

Cálculo do numero de viagens do pássaro faz em 1,999085505105 h?

$$1,999085505105 = (4/3) * (1 - (1/3)^N) / (1 - (1/3)) : . N = 7 \text{ Viagens}$$

Cálculo do numero de viagens do pássaro até o encontro dos trens.

Como:  $S_N = a_1 * (1 - q^N) / (1 - q) : . 2 = (4/3) * (1 - (1/3)^N) / (1 - (1/3))$

$(1/3)^N = 0 : . N = \text{infinito}$

Sabendo-se que toda medida está afetada de um desvio, pense com quantos algarismos significativos na medida do tempo você gostaria de saber o numero de viagens.